نام و دفتر A — حساب مدرسی — تکلیف شماره ۹

۱)

$$f(x)=\begin{cases}\cot\frac{\pi x}{4} & ; x\leq 1\\ \sqrt{x^2+1} & ; x>1\end{cases}$$

$$fof\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right)=\cot\frac{2\pi}{12}=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3})=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$$

۲) الف)

$$g(x)=2\cos^2 x \quad , \quad f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$$

$$fog\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب)

$$g(x)=\frac{x}{1-x} \quad , \quad f(x)=[x]$$

$$fog(\sqrt{2}) \rightarrow$$

$$g(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2}{-1}=-\sqrt{2}-2$$

$$f(\sqrt{2}+2)=[-\sqrt{2}-2]=-4$$

۳) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ مطلوب است $gof\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

④ الف) $f \circ g(x) = \{(۴,۵), (۲,۵), (۶,۱۲), (۸,۱۲)\}$

ب) $g \circ f(x) = \emptyset$

ج) $f \circ f(x) = \emptyset$

د) $g \circ g(x) = \{(۴,۸), (۲,۶), (۶,۱۰)\}$

⑤ $g = \{(۱,۲), (۳,۱), (a,۳), (b,۱)\}$ $\quad (۴,۲) \in f \circ g$

$f = \{(۲,۱), (۳,۲), (۴,۵), (۱,۷)\}$ $\quad (۴,۱) \in g \circ f$

$a = ۴$

$f \circ g = \{(۱,۷), (۳,۷), (a,۲), (b,۷)\}$

$g \circ f = \{(۳,۲), (۴,۱)\}$

$b = ۵$

$(a,b) = (۴,۵)$

⑥ $g \circ f(-۱) = ?$

$f(f(x)) = ۴x + ۳$

$g(۲x+۳) = ۳x - ۲$

$a(ax+b) + b = a^۲x + ab + b = ۴x + ۳ \rightarrow a^۲ = ۴ \rightarrow a = \pm ۲$

$ab + b = ۳$

$cx + d \xrightarrow{x = ۲x+۳} c(۲x+۳) + d = ۳x - ۲ = ۲xc + ۳c + d \rightarrow \frac{۹}{۲} + d = -۲$

$۲c = ۳ \rightarrow c = \frac{۳}{۲}$ $\qquad d = \frac{-۴-۹}{۲} = \frac{-۱۳}{۲}$

$ab+b=۳$ ، $a=\pm۲$

$a=۲ \rightarrow ۲b+b=۳b=۳ \rightarrow b=+۱$

$a=-۲ \rightarrow -۲b+b=-b=۳ \rightarrow b=-۳$

$f(x)=۲x+۱$ و $-۲x-۳$

$g(x)=\frac{۳}{۲}x-\frac{۱۳}{۲}$

$f(-۱)=-۲+۱=\boxed{-۱}$ ، $۲-۳=-۱$

$g(-۱)=\frac{-۳}{۲}-\frac{۱۳}{۲}=\frac{-۱۶}{۲}=\boxed{-۸} \Rightarrow g\circ f(-۱)=-۸$

$f(x)=\sqrt{x+|x|}$ ، $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$ (۷)

$D_{g\circ f}=?$

$x \in D_f \rightarrow x+|x| \geq ۰ \rightarrow x>۰$ یا $x=۰$

$x<۰$ یا $x-x=۰$

$x=۰$ یا

$f \in D_g \rightarrow x^۲-۴x \neq ۰$

$x(x-۴) \neq ۰$

$x \neq ۰ \rightarrow \sqrt{x+|x|} \neq ۰ \rightarrow x>۰$

$x \neq ۴ \rightarrow \sqrt{x+|x|} \neq ۴ \rightarrow x+|x| \neq ۱۶$

$x \neq ۸$

$D_{g\circ f}=(۰,+\infty)-\{۸\}$

① $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$:

$D_{(f+g)\circ f}$

$f+g(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$

$f+g\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}+\sqrt{\sqrt{1-x^2}}$

$=\sqrt{1-1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2}=\sqrt{x^2}+\sqrt[4]{1-x^2}$

$x^2\geq 0$ $\quad 1-x^2\geq 0 \rightarrow 1\geq x^2 \rightarrow 1\geq x\geq -1$

$D_{(f+g)\circ f}=[-1,1]$

② الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)=4x+5$

$\frac{3x+1}{x-2}=t \rightarrow x=\frac{2t+1}{t-3} \Rightarrow f(t)=4\times\frac{2t+1}{t-3}+5$

$=\frac{8t+4+5t-15}{t-3}=\frac{13t-11}{t-3}$ $\quad f(x)=\frac{13x-11}{x-3}$

ب) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2\times\frac{1}{x}+3x\times\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=$

$x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$

$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\frac{3}{x}-3x=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(\frac{1}{x}+x\right)$

$f(t)=t^3-3t \rightarrow f(x)=x^3-3x$

$f(x) = x\sqrt{x} \rightarrow f(0) = 0$ (10)

$g(1) = 0 \quad , \quad g(2\sqrt{2}) = 0$

$\int$

$f(x) = 1 \rightarrow x = 1$

$f(x) = 2\sqrt{2} \rightarrow x = 2$ $\Big\}$ $2 - 1 \neq 1$