۴) $\cot\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \sqrt{۳} \rightarrow f(\sqrt{۳}) = \sqrt{۳+۱} = ۲$

$$\boxed{f\circ f\left(\frac{۲}{۳}\right) = ۲}$$

کار صدانی

۲) الف

$g\left(\frac{\pi}{۳}\right) = ۲\cos^۲\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲}$

$f\left(\frac{۱}{x}\right) = \sqrt{\frac{۲}{x} - \frac{۱}{x^۲}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{۲x - x^۲}$

$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{۲\times\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow \boxed{f\circ g\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}}$

۲) ب

$g(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲})}{(۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})} = \frac{\sqrt{۲}+۲}{-۱} = -۲-\sqrt{۲}$

$f(-۲-\sqrt{۲}) = [-۲-\sqrt{۲}] = -۲ + [-\sqrt{۲}] = -۴$

$$\boxed{f\circ g(\sqrt{۲}) = -۴}$$

۳)

$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

$$\boxed{g\circ f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۲}}$$

۴)

$f\circ g(x) = g(x) \Rightarrow f\circ g(x) = \{(۴,۵),(۲,۵),(۶,۱۲),(۸,۱۲)\}$

$۴ \rightarrow ۶ \rightarrow ۵$

$۲ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵$

$۶ \rightarrow ۸ \rightarrow ۱۲$

$۸ \rightarrow ۱۰ \rightarrow ۱۲$

$g\circ f(x) \rightarrow ۴ \rightarrow ۵ \nrightarrow \;\rightarrow g\circ f(x) = \{\varphi\}$ تهی

$۶ \rightarrow ۵ \nrightarrow$

$۸ \rightarrow ۱۲ \nrightarrow$

$۱۰ \rightarrow ۱۲ \nrightarrow$

(۴/۲) $f \circ f(x) \to$ ۴ → ۵ ✗

۶ → ۵ ✗ ϕ تهی

۸ → ۱۲ ✗

۱۰ → ۱۴ ✗

(۴/۵) $g \circ g(x) \to$ ۴ → ۶ → ۸

۲ → ۴ → ۶   → $g \circ g(x) =$ {(۴,۸), (۲,۶), (۶,۱۰)}

۶ → ۸ → ۱۰

۸ → ۱۰ ✗

---

۵   $f \circ g \to$ ۱ → ۲ → ۱

۴ → ۱ → ۷   → $f \circ g$ = {(۱,۱) (۴,۷) (a,۳) (b,۷)}

a → ۴ → ۳   a = ۴

b → ۱ → ۷

$g \circ f \to$ ۲ → ۱ → ۳

۴ → ۳ ✗   → $g \circ f$ = {(۲,۳), (۴,b)}

۴ → ۵ → b   b = ۵

۱ → ۷ ✗

$\boxed{(a,b) = (۴,۵)}$

---

۶   f(x) = ax + b   g(x) = cx + d

f(f(x)) = a(ax+b) + b = a²x + ab + b = ۴x + ۳

a = ۲ → b = +۱

a = −۲ → b = −۳

g(۲x+۳) = ۳x − ۲ = ۲xc + ۳c + d = ۳x − ۲

۲xc = ۳x → c = ۱٫۵

۳c + d = −۲ → d = −۶٫۵

g(x) = ۱٫۵x − ۶٫۵

f(x) = ۲x + ۱ → f(−۱) = −۱

$\boxed{g(f(-1)) = -۸}$

f(x) = −۲x − ۳ → f(−۱) = −۱

$\boxed{g(f(-1)) = -۸}$

۷ $g \circ f(x)$

$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \sqrt{۲x} \to$

$D_g \to \mathbb{R} - [۴, ۰] \to ۴ = \sqrt{۲x} \to x = ۸$

$۰ = \sqrt{۲x} \to x = ۰$

$\boxed{\mathbb{R} - \{۸, ۰\}}$

---

۸ $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ $\quad D(f+g) \circ f$ — $۰ \leq \sqrt{۱-x^۲} \leq ۱$

$-۱ \leq x \leq ۱$

$D_f = x \geq ۰$

$D_g = -۱ \leq x \leq ۱$ $\to D_{f+g} = [۰, ۱] \to \boxed{D(f+g) \circ f = [-۱, ۱]}$

جواب

---

۹ $f\left(\frac{۲x+۱}{x-۲}\right) = ۴x + ۵$

$\frac{۲x+۱}{x-۲} = t \to ۲x + ۱ = tx - ۲t \to x(۲-t) = -۱ - ۲t$

$x = \frac{-۱-۲t}{۲-t} = \frac{۲t+۱}{t-۲}$

$\to f(t) = ۴\left(\frac{۲t+۱}{t-۲}\right) + ۵ = \frac{۸t + ۴ - ۱۰ + ۵t}{t-۲}$

$f(t) = \frac{۱۳t - ۶}{t-۲} \to \boxed{f(x) = \frac{۱۳x - ۶}{x-۲}}$

---

۹ $f\left(x + \frac{۱}{x}\right) = x^۳ + \frac{۱}{x^۳}$

$x + \frac{۱}{x} = t \to x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = \left(x + \frac{۱}{x}\right)^۳ - ۳\left(x + \frac{۱}{x}\right)$

$f(t) = t^۳ - ۳t \to \boxed{f(x) = x^۳ - ۳x}$

$g(۱) = ۰$

$g(\sqrt{۲}) = ۰$ $\quad g(x\sqrt{x}) = ۰$

$x\sqrt{x} = ۱ \to x = ۱$

$x\sqrt{x} = ۲\sqrt{۲} \to x = ۲$

$x_۱ - x_۲ = ۲ - ۱ = ۱ \to \boxed{\Delta x = ۱}$