۱۸٫۷۵

«اصغر عارفی»

۱)

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}} \Rightarrow x\neq ۰ , x\neq ۱ , \frac{x-۱}{x}-\frac{x}{x-۱}\geqslant ۰$

$\frac{x^۲+۱-۲x-x^۲}{x(x-۱)} \rightarrow \frac{۱-۲x}{x(x-۱)}\geqslant ۰$ $\begin{array}{c|c|c|c}  & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۱ \\ + & - & + & - \end{array}$ ۶ $D\rightarrow(-\infty,۰)\cup[\frac{۱}{۲},۱)$

ب) $f(x)=\frac{\frac{۱}{x+۱}-\frac{۲}{x}}{\frac{۳}{x-۱}+\frac{۱}{x+۲}} \Rightarrow x\neq -۱ , x\neq ۰ , x\neq ۱ , x\neq -۲$

$\frac{۳}{x-۱}+\frac{۱}{x+۲}\neq ۰ \rightarrow \frac{۳x+۶+x-۱}{x^۲+۲x-x-۲} \rightarrow \frac{۴x+۵}{x^۲+x-۲}\neq ۰$

$۴x+۵\neq ۰ \rightarrow ۴x\neq -۵ \quad x\neq \frac{-۵}{۴}$ $D=\mathbb{R}-\{-۱,۰,۱,-۲,-\frac{۵}{۴}\}$

---

۲)

الف) $f(x)=\sqrt{[(\frac{۱}{۳})^x-۹](۳۲-۴^x)} \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^x-۹=۰ \rightarrow ۳^{-x}=۹\rightarrow ۳^۲ \rightarrow x=-۲$

$۳۲-۴^x=۰ \rightarrow ۲^{۲x}=۲^۵ \rightarrow x=\frac{۵}{۲}$ ۱٫۲۵

$۳۲-۴^x>۰ , (\frac{۱}{۳})^x-۹>۰$ ✓ if $x<-۲ \xrightarrow{\text{حاصل ضرب}} \square>۰$

$۳۲-۴^x>۰ , (\frac{۱}{۳})^x-۹<۰$ if $-۲<x<\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب}} \square<۰$ نامطلوب

$۳۲-۴^x<۰ , (\frac{۱}{۳})^x-۹<۰$ if $x>\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب}} \square>۰$

$D=(-\infty,-۲]\cup[\frac{۵}{۲},\infty)$

ب) $\sqrt[۴]{x-۱}+\sqrt{y+۱}=۲ \longrightarrow \sqrt[۴]{x-۱}+\sqrt{y+۱}-۲=۰$

$\downarrow \qquad \searrow$

$x-۱\geqslant ۰ \rightarrow x\geqslant ۱ \qquad y+۱\geqslant ۰\rightarrow y\geqslant -۱ \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \mid x\geqslant ۱, y\geqslant -۱\}$

---

۳)

$f(x)=\frac{\log_۴ (x^۲-x-۲)}{\sqrt{x^۲-۱}+۱} \Rightarrow \sqrt{x^۲-۱}+۱\neq ۰ \rightarrow x<-۱$ یا $x>۱$ ①

$x^۲-x-۲>۰ \rightarrow (x-۲)(x+۱)>۰ \rightarrow x>۲$ یا $x<-۱$ ②

۶

① ∩ ② $\longrightarrow D=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

---

۴)

$\sqrt{۳+ax-x^۲} \Rightarrow D=[-۲,b] \rightsquigarrow a+b=?$

به ازای آن عبارت صفر است ⟵ کوچکترین عدد ⟵

۶

$۳-۲a-۴=۰ \longrightarrow -۱=۲a \longrightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

$۳-\frac{۱}{۲}x-x^۲ \longrightarrow$ مجموع ریشه‌ها $=-\frac{۱}{۲}=-\frac{b}{a}$ $\quad b=-\frac{۱}{۲}-(-۲)=\frac{۳}{۲}$

$a+b=-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=۱$

«اصغر مارانی»

۵)

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۲ & : x\geq ۱ \\ ۲x+۳ & , x\leq ۱ \end{cases} \longrightarrow g(x)=\sqrt{f(x)-x}=?$$

$\hookrightarrow f(x)-x\geq ۰$

$x\geq ۱ \to ۳x-۲-x\geq ۰ \to ۲x-۲\geq ۰$

$x\geq ۱$

$x<۱ \to ۲x+۳-x\geq ۰ \to x+۳\geq ۰$

$x\geq -۱$

$D=[-۳,۱)\cup[۱,+\infty) \longrightarrow x\geq -۳$

---

۶)

$$f(x)=\begin{cases} (a+۱)(x+۲) & : x>۱ \\ ۳a+۲x & : x\leq ۱ \end{cases} \quad , ۲f(۵)=f(-۲)+a \qquad a=?$$

۱٫۵

$a=-۱٫۸$

$۲f(۵)=f(-۲)+a \longrightarrow f(۵)\to(a+۱)(۷)=۷a+۷$

$f(-۲)\to -۴+۳a=-۱$

$۲(۷a+۷)=-۱+a \longrightarrow ۱۴a+۱۴=-۱+a \to ۱۳a=-۱۵ \to a=\frac{-۱۵}{۱۳}$

---

۷)

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}+۲ \qquad f(۲-\sqrt{۳})+f(۲+\sqrt{۳})=?$$

$f(۲+\sqrt{۳})=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+۲=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}}}+۲$

$f(۲+\sqrt{۳})=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+۱}+۲ \longrightarrow \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۲}}+\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}+۲ \to \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}+۲$

$\longrightarrow \sqrt{۶}+۲$

$f(۲-\sqrt{۳}) \xrightarrow{\text{همین روش}} \sqrt{۶}+۲$

$f(۲-\sqrt{۳})+f(۲+\sqrt{۳})=\sqrt{۶}+۲+\sqrt{۶}+۲=۲\sqrt{۶}+۴$

---

۸)

$$۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x \qquad f(x)=?$$

$۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x \xrightarrow{\times ۲} ۴f(x)-۶\cancel{f(-x)}=۸x^۲-۲x$

$۲f(-x)-۳f(x)=۴x^۲+x \xrightarrow{\times ۳} ۶\cancel{f(-x)}-۹f(x)=۱۲x^۲+۳x$

$-۵f(x)=۲۰x^۲+x \longrightarrow fx=\frac{۲۰x^۲+x}{-۵} \longrightarrow f(x)=-۴x^۲-\frac{x}{۵}$

« احمد مارانی »

۹)

$(x+۲)f(x)-۴xf(x+۲)=۴x^۲-mx+۳m-۱ \qquad f(۰)=?$

$f(x)=ax^۲+bx+c \rightarrow (ax^۲+bx+c)(x+۲)-۴x(a(x+۲)^۲+b(x+۲)+c)=$
$۴x^۲-mx+۳x-۱ \longrightarrow (ax^۲+bx+c)(x+۲)=ax^۳+۲ax^۲+bx^۲+۲bx+$
$cx+۲c=ax^۳+(۲a+b)x^۲+(۲b+c)x+۲c \cdot a(x+۲)^۲=a(x^۲+۴x+۴)=$
$ax^۲+۴ax+۴a \quad b(x+۲)=bx+۲b$
$۴x(a(x+۲)^۲+b(x+۲)+c)=۴x(ax^۲+۴ax+۴a+bx+۲b+c)=$
$۴x(ax^۲+(۴a+b)x+(۴a+۲b+c))=۴ax^۳+۴(۴a+b)x^۲+۴(۴a+۲b+c)x=$
$۴ax^۳+(۱۶a+۴b)x^۲+(۱۶a+۸b+۴c)x$
$(ax^۳+(۲a+b)x^۲+(۲b+c)x+۲c)-(۴ax^۳+(۱۶a+۴b)x^۲+(۱۶a+۸b+۴c)$
$x=۴x^۲-mx+۳m-۱$
ضرایب $x^۳=۰ \rightarrow a-۴a=-۳a=۰ \longrightarrow a=۰ \rightarrow f(x)=bx+c$ $\quad \boxed{f(۰)=-۲(۰)+\frac{۲۵}{۴}=\frac{۲۵}{۴}}$
تا اینجا دوباره مراحل قبل $\longrightarrow$ ضرایب $x^۲ \rightarrow b=-۲$ $\qquad$ ضرایب $x \rightarrow m \cdot ۲c-۸ \rightarrow c=\frac{۲۵}{۴}$

---

۱۰)

$f(x)+f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x} \qquad f(-۱)=?$

$f(x)=ax+b \longrightarrow ax+b+a\left(\frac{۱}{x}\right)+b=ax+b+\frac{a}{x}+b=ax+\frac{a}{x}+۲b$

$\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x}=\frac{۳x^۲}{x}-\frac{۱۲x}{x}+\frac{۳}{x}=۳x-۱۲+\frac{۳}{x}$

$a=۳$
$b=-۶$ $\qquad f(x)=۳x-۶ \rightarrow f(-۱)=۳(-۱)-۶=-۹$

۲ ـــ ب)

$x-۱\geqslant ۰ \rightarrow x\geqslant ۱$

$۳-\underbrace{\sqrt[۴]{x-۱}}_{\geqslant ۰}=\underbrace{\sqrt{y+۱}}_{+} \longrightarrow x\leq ۸۲ - D_f=[۱,۸۲]$