①

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}} \Rightarrow \frac{1-2x}{x^2-x}\geq 0 \Rightarrow$

x^2-x ، $x(x-1)\neq 0$: $0,1$

0		$\frac{1}{2}$		1	
$+$ ○	$-$	●	$+$	○	$-$

$D_f=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)$

ب) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}}=\dfrac{\frac{x-2x-2}{x(x+1)}}{\frac{3x+6+x-1}{(x-1)(x+2)}}$

$x(x+1) \rightarrow 0,-1$

$3x+6+x-1 \rightarrow 4x+5\neq 0 \Rightarrow x\neq\frac{-5}{4}$

$(x-1)(x+2) \rightarrow 1,-2$

$D_f=\mathbb{R}-\{0,\pm1,-2,-\frac{5}{4}\}$

---

②

الف) $f(x)=\sqrt{((\frac{1}{3})^x-9)(32-2^x)}$

$3^{-x}=9 \Rightarrow x=-2$ ، $32=2^x \Rightarrow \log_2^{32}=x$

-2		$\log$	
$+$ ●	$-$	●	$+$

$D_f=(-\infty,-2]\cup[(\log_2^{32}),+\infty)$

ب) $\sqrt{y+1}+4\sqrt{x-1}=3 \Rightarrow \sqrt{y+1}=-4\sqrt{x-1}+3 \Rightarrow -4\sqrt{x-1}+3\geq 0 \Rightarrow 3\geq \sqrt[4]{x-1}$

$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

$81\geq x-1 \Rightarrow 82\geq x \Rightarrow D_f=[1,82]$

---

③

$f(x)=\dfrac{\log_2(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1} \Rightarrow (x-2)(x+1) \Rightarrow$

-1		2	
$+$ ○	$-$	○	$+$

$\sqrt{x^2-1}+1\neq 0 \Rightarrow$ همواره صحیح ،

$x^2-1\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow x\geq 1 \,,\, x\leq -1$

-1		1	
$+$ ●	$-$	●	$+$

$D_f=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

---

④

$\sqrt{-x^2+ax+3}\,,\; D_f=[-2,b]$ $\xrightarrow{x=-2}$ $-4-2a+3=0 \Rightarrow 2a=-1\,,\,a=-\frac{1}{2}$

$\sqrt{-x^2-\frac{1}{2}x+3} \Rightarrow x^2-\frac{1}{2}x+3=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x-3=0 \Rightarrow 2x^2+x-6$

$\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4} = \begin{cases} x=\frac{-8}{4}=-2 \\ x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=b \end{cases}$ $a+b=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

---

⑤

$f(x)-(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq x$

if $x\geq 1 \Rightarrow f(x)=3x-2 \Rightarrow$ ✓

if $x<1 \Rightarrow f(x)=2x+3 \Rightarrow 1>x\geq -3$

$D_f=[-3,+\infty)$

$f(۵) = (a+۱)(۷) \Rightarrow ۷a+۷ \Rightarrow ۲f(۵) = ۱۴a+۱۴$ ۶

$f(-۲) = ۳a-۴ \ , \ ۲f(۵) - a = f(-۲) \Rightarrow ۱۳a+۱۴ = ۳a-۴ \Rightarrow a = -۱٫۸$

$f(۲-\sqrt{۳}) = \sqrt{۲-\sqrt{۳}} + \dfrac{۱}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}} + ۲ \Rightarrow \sqrt{۲-\sqrt{۳}} + \sqrt{۲+\sqrt{۳}} + ۲$ ۷

$f(۲+\sqrt{۳}) = \sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \dfrac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} + ۲ = \sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \sqrt{۲-\sqrt{۳}} + ۲$

$\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \sqrt{۲-\sqrt{۳}} + ۲ + \sqrt{۲-\sqrt{۳}} + \sqrt{۲+\sqrt{۳}} + ۲ = ۲\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}} + \sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right) + ۴$

$t^۲ = ۲-\sqrt{۳} + ۲+\sqrt{۳} + ۲(\sqrt{۱}) = ۶ \Rightarrow t = \sqrt{۶} \Rightarrow \sqrt{۲-\sqrt{۳}} + \sqrt{۲+\sqrt{۳}} = \sqrt{۶}$

$f(۲-\sqrt{۳}) + f(۲+\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۶} + ۴$

$$\begin{aligned} ۲f(x) - ۳f(-x) &= ۴x^۲ - x \\ ۲f(-x) - ۳f(x) &= ۴x^۲ + x \end{aligned} \quad \begin{cases} ۴f(x) - ۶f(-x) = ۸x^۲ - ۲x \\ ۶f(-x) - ۹f(x) = ۱۲x^۲ + ۳x \end{cases}$$ ۸

$-۵f(x) = ۲۰x^۲ + x \longrightarrow f(x) = -\dfrac{۲۰x^۲+x}{۵}$

$(x+۲)f(x) - ۳xf(x+۲) = ۴x^۲ - mx + ۳m - ۱$ ۹

$\xrightarrow{x=۰} ۲f(۰) = ۳m - ۱$

$\xrightarrow{x=-۲} ۶f(۰) = ۱۶ + \underbrace{۲m + ۳m}_{۵m} - ۱$

$$\begin{cases} ۱۰f(۰) = ۱۵m - ۵ \\ ۱۸f(۰) = ۴۵ + ۱۵m \end{cases}$$

$۸f(۰) = ۵۰ \Rightarrow f(۰) = ۶٫۲۵$

$f(x) + f\left(\dfrac{۱}{x}\right) = \dfrac{۳x^۲ - ۱۲x + ۳}{x} \Rightarrow f(x) = ax + b$ ۱۰

$ax + b + \dfrac{a}{x} + b = \dfrac{۳x^۲ - ۱۲x + ۳}{x} \Rightarrow \dfrac{ax^۲ + ۲bx + a}{x} \Rightarrow a = ۳ \ , \ b = -۶$

$f(-۱) = -۳ - ۶ = -۹$