۱)

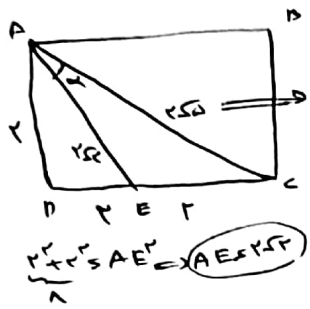
$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 \times \sin\alpha = 6\sqrt{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{6\sqrt{3}}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = 120^\circ$ بیشترین مقدار

$\alpha = 60^\circ$ کمترین مقدار

$\frac{120}{60} = 2 \Rightarrow$

۲)



$۲^۲ + ۴^۲ = AC^۲ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۵}$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث AEC

$EC^۲ = AE^۲ + AC^۲ - ۲AE \times AC \times \cos\alpha$

$۴ = ۸ + ۲۰ - ۲ \times ۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۵} \times \cos\alpha \Rightarrow ۲۴ = ۸\sqrt{۱۰}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$

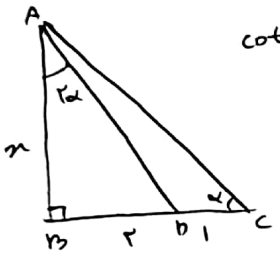
$۸ + ۲^۲ = AE^۲ \Rightarrow AE = ۲\sqrt{۲}$

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \sin^۲\alpha + \frac{۹}{۱۰} = ۱ \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

$\alpha < ۹۰^\circ$ پس مثلثاتی مثبت است

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}} = ۳$ ✓

۳)



$\cot\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{x} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{x}{۳}$

$\cot ۲\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{x}{۲} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{۲}{x} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۲(\frac{x}{۳})}{۱-(\frac{x}{۳})^۲} = \frac{\frac{۲x}{۳}}{\frac{۹-x^۲}{۹}} = \frac{۶x}{۹-x^۲}$

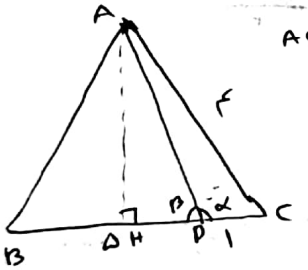
$\frac{۶x}{۹-x^۲} = \frac{۲}{x} \Rightarrow ۶x^۲ = ۹ - x^۲ \Rightarrow ۷x^۲ = ۹$

$x^۲ = \frac{۹}{۷} \Rightarrow x = \frac{۳}{\sqrt{۷}}$ ✓

x طول ضلع است پس مثبت است

$\cot\alpha = \frac{۳}{\frac{۳}{\sqrt{۷}}} = \sqrt{۷}$ ✓

۴)



$AC = AB$

$\tan\alpha = ?$

$\triangle ABC$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow AH$ ارتفاع، میانه، عمودمنصف BC است.

$BH = CH$

$BC = BD + DC = ۵ + ۱ = ۶$

$BC = BH + CH = ۲CH$ $\Big\} \therefore ۲CH = ۶ \Rightarrow CH = ۳$

$CH = ۳ \Rightarrow DH = ۲$

$AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۶ = ۹ + AH^۲$

$AH^۲ = ۷ \Rightarrow AH = \sqrt{۷}$ ✓

$\tan\beta = \frac{AH}{HD} = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$ $\overset{BH=CH}{\Longrightarrow}$ $\beta = ۱۸۰^\circ - \alpha$

$\tan\beta = -\tan\alpha$ $\Rightarrow \tan\alpha = -\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ✓

۵

$2\sin^2x+\cos^2x=\frac{4}{3}$

$2(1-\cos^2x)+\cos^2x=\frac{4}{3} \Rightarrow 2-2\cos^2x+\cos^2x=\frac{4}{3}$

$2-\cos^2x=\frac{4}{3} \Rightarrow \underbrace{2-\frac{4}{3}}_{\frac{2}{3}}=\cos^2x$

$1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}_{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{\tan^2x=\frac{1}{2}}$

۶

$\frac{\sin^4\alpha+4\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha)^2+4\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha+1+4\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha+1}^{(\cos^2\alpha+1)^2}=\cos^2\alpha+1 \quad (A)$

$\frac{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{(\cos^2\alpha)^2+4\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha+1+4\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha+1)^2}{\sin^2\alpha+1}=\sin^2\alpha+1 \quad (B)$

$(A)+(B)=\cos^2\alpha+1-\sin^2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\boxed{\cos2\alpha}$

۷

$\tan\alpha=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ (ناحیه سوم α)

$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$

$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

$\cot\alpha=\frac{3}{4}$

$\sin(\underbrace{\frac{9\pi}{2}}_{4\pi+\frac{\pi}{2}}+\alpha)\cos(\underbrace{\frac{7\pi}{2}}_{4\pi-\frac{\pi}{2}}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})$

$\cos(\alpha)\times(-\sin(\alpha))+\cot(\alpha)=-\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{-12}{25}+\frac{3}{4}=\frac{-48+75}{100}=\boxed{\frac{27}{100}}$

۸

$x=\frac{\pi}{12}$

$(3\cos\underbrace{4x}_{\frac{\pi}{3}}+\underbrace{\sqrt2\sin x-\sqrt2\cos x}_{\sqrt2(\sin x-\cos x)})=3\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac12}+\underbrace{\sqrt2(\sqrt2\underbrace{\sin(-\frac{\pi}{6})}_{-\frac12})}_{-1}=\frac{3}{2}-1=\boxed{\frac{1}{2}}$

$\sqrt2(\sin x-\cos x)=2\sin(x-\frac{\pi}{4})$, $\quad \frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=-\frac{2\pi}{12}$

۹

$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{4} \Longrightarrow$

$x^2=1+16=17 \Rightarrow x=\sqrt{17}$ $\rightarrow \cos(\frac{\alpha}{2})=\frac{\pm4}{\sqrt{17}}$, $\sin(\frac{\alpha}{2})=\frac{\pm1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

چون $0<\tan\frac{\alpha}{2}<1$ پس $k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(\times2)$ $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\sin\alpha=2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})=\underbrace{2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}}_{\frac{8}{17}} \Longrightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\tan\alpha=\frac{8}{15}$

پس α در ناحیه اول قرار دارد و تمام نسبت‌های مثلثاتی آن مثبت هستند.

$\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=\frac{\frac{8\times17-8\times15}{15\times17}}{\frac{-7}{17}}=\frac{16}{5\times(-7)}=\frac{16}{15\times(-7)}=\boxed{\frac{16}{-105}}$

۱۰

$2\sin\alpha<\underbrace{\sin2\alpha}_{2\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow 2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha<0$

$2\sin\alpha\underbrace{(1-\cos\alpha)}_{\oplus}<0 \Rightarrow \boxed{\sin\alpha<0}$

$0<\frac{\cot\alpha}{\underbrace{\sin\alpha}_{\ominus}} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha<0} \Rightarrow$ (انتهای کمان α در ربع چهارم)