پرنیا جانگیری - یازدهم دفتر A - تکلیف ۲۷

(۱)

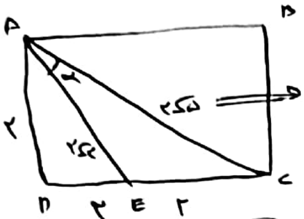
$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 6 \times \sin\alpha = 4/5 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1/5}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = 120°$ بیشترین مقدار $\Rightarrow \frac{120}{60} = 2$

$\alpha = 60°$ کمترین مقدار

۲

(۲)



$2^2 + 4^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$ (20)

$2^2 + 2^2 = AE^2 \Rightarrow AE = 2\sqrt{2}$ (8)

طبق قضیه کسینوس ها در مثلث $\overset{\triangle}{EAC}$ $\Rightarrow EC^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \times AC \times \cos\alpha$

$4 = 8 + 20 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \times \cos\alpha \Rightarrow 24 = 8\sqrt{10}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

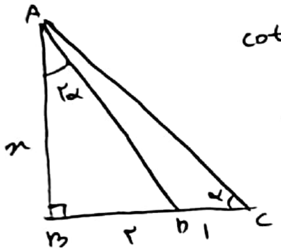
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \frac{9}{10} = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \xRightarrow{\alpha < 90°} \sin\alpha = +\frac{1}{\sqrt{10}}$

سینوس مثبت است

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = 3$

۲

(۳)



$\cot\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{x} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{x}{3}$

$\cot 2\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{x}{2} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2}{x} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \Rightarrow \frac{2(\frac{x}{3})}{1 - (\frac{x}{3})^2} = \frac{\frac{2x}{3}}{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{\frac{2x}{3}}{\frac{9 - x^2}{9}}$

$\frac{6x}{9 - x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow 3x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 4x^2 = 9$

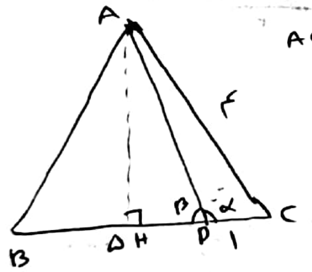
$x = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

x طول ضلع است پس مثبت است

$\cot\alpha = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$

۲

(۴)



$AC = AB$

$\tan\alpha = ?$

$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین $\Rightarrow AH$ ارتفاع، میانه و عمود منصف BC است.

$BH = CH$

$BC = BD + DC = 5 + 1 = 6$

$BC = BH + CH = 2CH$

$\Rightarrow 2CH = 6 \Rightarrow CH = 3$

$CH = CD + DH \Rightarrow DH = 2$

$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow 16 = 9 + AH^2$

$AH^2 = 7 \Rightarrow AH = \sqrt{7}$

$\tan\beta = \frac{AH}{HD} = \frac{\sqrt{7}}{2} \xRightarrow{BH = CH} \tan\alpha = \frac{-\sqrt{7}}{2}$

$\beta = 180° - \alpha$ و $\tan\beta = -\tan\alpha$

۲

Scanned with CamScanner

(۵)

$۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$

$۲(۱-\cos^۲ x) + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$

$۲ - \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \underbrace{۲ - \frac{۴}{۳}}_{\frac{۲}{۳}} = \cos^۲ x$

$۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\underbrace{\cos^۲ x}_{\frac{۲}{۳}}} \Rightarrow \boxed{\tan^۲ x = \frac{۱}{۲}}$

(۶)

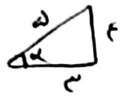
$\frac{\sin^۴\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} = \frac{(\sin^۲\alpha)^۲ + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} = \frac{\cos^۴\alpha - ۲\cos^۲\alpha + ۱ + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} = \frac{\cos^۴\alpha + ۲\cos^۲\alpha + ۱}{\cos^۲\alpha + ۱} = \frac{(\cos^۲\alpha+۱)^۲}{\cos^۲\alpha+۱} = \cos^۲\alpha + ۱ \quad (A)$

$\frac{\cos^۴\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha} = \frac{(\cos^۲\alpha)^۲ + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha} = \frac{\sin^۴\alpha - ۲\sin^۲\alpha + ۱ + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha} = \frac{(\sin^۲\alpha+۱)^۲}{\sin^۲\alpha+۱} = \sin^۲\alpha + ۱ \quad (B)$

$(A) + (B) = \cos^۲\alpha + ۱ - \sin^۲\alpha - ۱ = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = \boxed{\cos ۲\alpha}$

(۷)

$\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$



$\Rightarrow$ (ناحیه سوم α)

$\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$

$\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

$\sin(\underbrace{\frac{۹\pi}{۲}}_{۴\pi+\frac{\pi}{۲}}+\alpha)\cos(\underbrace{\frac{۷\pi}{۲}}_{۴\pi-\frac{\pi}{۲}}-\alpha) - \tan(\alpha - \frac{۳\pi}{۲})$

$\cos(\alpha)\times(-\sin(\alpha)) + \cot(\alpha) = \frac{-۳}{۵}\times\frac{۴}{۵} + \frac{۳}{۴} = \frac{-۱۲}{۲۵} + \frac{۳}{۴} = \frac{-۴۸+۷۵}{۱۰۰} = \boxed{\frac{۲۷}{۱۰۰}}$

(۸)

$x = \frac{\pi}{۱۲}$

$(۳\cos ۴x + \underbrace{\sqrt{۲}\sin x - \sqrt{۲}\cos x}) = ۳\cos\frac{\pi}{۳} + \sqrt{۲}(\sqrt{۲}\sin(-\frac{\pi}{۶})) = \frac{۳}{۲} + ۱ = \boxed{\frac{۱}{۲}}$

$\sqrt{۲}(\sin x - \cos x)$

$\sqrt{۲}\sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴})$

$\frac{\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۴} = \frac{-۲\pi}{۱۲}$

$\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$, $\sin(-\frac{\pi}{۶}) = \frac{-۱}{۲}$, $\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۲}\cdot\frac{-۱}{۲} = -۱$

(۹)

$\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow$

$x^۲ = ۱ + ۱۶ = ۱۷ \Rightarrow x = \sqrt{۱۷}$

$\to \cos(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{\pm ۴}{\sqrt{۱۷}}$

$\to \sin(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{\pm ۱}{\sqrt{۱۷}} \Rightarrow$

$۰ < \tan\frac{\alpha}{۲} < ۱$ پس ←

$k\pi < \frac{\alpha}{۲} < k\pi + \frac{\pi}{۴}$

(×۲)

$۲k\pi < \alpha < ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

پس α در ناحیه‌ی اول قرار دارد و تمامی نسبت‌های مثلثاتی آن مثبت هستند.

$\sin\alpha = ۲\sin(\frac{\alpha}{۲})\cos(\frac{\alpha}{۲}) = ۲\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\cdot\frac{۴}{\sqrt{۱۷}} = \frac{۸}{۱۷}$

$\to \cos\alpha = \frac{۱۵}{۱۷}$

$\to \sin\alpha = \frac{۸}{۱۷}$

$\to \tan\alpha = \frac{۸}{۱۵}$

$\frac{\frac{۸}{۱۵} - \frac{۸}{۱۷}}{\frac{۸}{۱۷} - \frac{۱۵}{۱۷}} = \frac{\frac{۸\times۱۷ - ۸\times۱۵}{۱۵\times۱۷}}{\frac{-۷}{۱۷}} = \frac{۱۶}{۱۵\times(-۷)} = \frac{۱۶}{۱۵\times(-۷)} = \boxed{\frac{۱۶}{-۱۰۵}}$

(۱۰)

$۲\sin\alpha < \underbrace{\sin ۲\alpha}_{۲\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow ۲\sin\alpha - ۲\sin\alpha\cos\alpha < ۰$

$۲\sin\alpha\,\underbrace{(۱-\cos\alpha)}_{\oplus} < ۰ \Rightarrow \boxed{\sin\alpha < ۰}$

$۰ < \frac{\cot\alpha}{\underbrace{\sin\alpha}_{\ominus}} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha < ۰} \Rightarrow$ (انتهای کمان α در ربع چهارم)

Scanned with CamScanner