یکتا دژم

① $\log_{mn}^{m} + \log_{mn}^{mn} = b \rightarrow \log_{mn}^{m} = b-۱ \rightarrow \dfrac{\log_n^m}{\log_n^m + \log_n^n} = b-۱ \rightarrow b = \dfrac{a}{a+۱}+۱$

$[b] = \Big[\underbrace{\dfrac{a}{a+۱}}_{۰}\Big] + ۱ \rightarrow \boxed{[b]=۱}$

---

② الف) I $\log_{\frac{۱}{۲}}^{x} \neq ۰ \rightarrow x \neq ۱$ II $\dfrac{x}{\log_۲^x} \geqslant ۰$

x		۰		۱	
P		+	-	+	

$[۰,۱)$

I $\cap$ II $\rightarrow \boxed{[۰,۱)}$

ب) I $x^۲ - x - ۲ > ۰ \rightarrow (x-۲)(x+۱) > ۰$, $x=۲$, $x=-۱$

	-۱		۲	
+		-		+

$(-\infty,-۱) \cup (۲,+\infty)$

II $x^۲ - ۱ \geqslant ۰ \rightarrow$

	-۱		۱	
+		-		+

$(-\infty,-۱] \cup [۱,+\infty)$

I $\cap$ II $\rightarrow \boxed{(-\infty,-۱) \cup (۲,+\infty]}$

---

③ $\log_x^a = t \rightarrow ۲t + \dfrac{۱}{۲t} = ۲ \xrightarrow{\times(۲t)} ۴t^۲ - ۴t + ۱ = ۰ \quad (۲t-۱)^۲ = ۰ \rightarrow \dfrac{۱}{۲}$

$\log_x^a = \dfrac{۱}{۲} \rightarrow \dfrac{۱}{۲}\log_۳^a = \dfrac{۱}{۲} \rightarrow \boxed{a=۳}$

---

④ $\log_{۱۰}^{\frac{۵}{۳}} = \log_{۱۰}^{۱۰} - \log_{۱۰}^{۲} - \log_{۱۰}^{۳} = ۰٫۳$ | $\log_{۱۰}^{۹} = ۲\log^۳ = ۰٫۸$ | $\log_{۱۰}^{۱۵} = \log_{۱۰}^{۱۰} - \log_{۱۰}^{۲} + \log_{۱۰}^{۳} = ۱٫۱$

$۳x^۲ + ۸x - ۱۱ = ۰ \rightarrow x = -\dfrac{۱۱}{۳}, \; x = ۱$ $\quad \left| -\dfrac{۱۱}{۳} - \dfrac{۳}{۳} \right| = \boxed{\dfrac{۱۴}{۳}}$

---

⑤ $\log_{۱۴}^{۲} + \log_{۱۴}^{۵} = \dfrac{۱}{\log_۲^۲ + \log_۲^۷} + \dfrac{۱}{\log_۵^۲ + \log_۵^۷} = \dfrac{۱}{۲٫۸} + \dfrac{۱}{۰٫۵ + \underbrace{\log_۵^۷}_{۱٫۴}} = \boxed{\dfrac{۱۵}{۱۹}}$

$\log_۲^۷ = \dfrac{\log_۵^۷}{\underbrace{\log_۵^۲}_{۰٫۵}} = ۲٫۸ \rightarrow \log_۵^۷ = ۱٫۴$

---

⑥ $\log_{۱۵}^{۳} + \log_{۱۵}^{۲} = \dfrac{۱}{\log_۳^۳ + \log_۳^۵} + \dfrac{۱}{\log_۲^۳ + \log_۲^۵} = \dfrac{۱}{۲٫۵} + \dfrac{۱}{۴} = \boxed{۰٫۶۵}$

$\log_۳^۵ = \dfrac{\log_۲^۵}{\underbrace{\log_۲^۳}_{۱٫۶}} = ۱٫۵ \rightarrow \log_۲^۵ = ۲٫۴$

---

⑦ $\underbrace{\log_۴^۴}_{۱} + \log_۴^۳ = \dfrac{۳m+۳}{۴} = \dfrac{۳}{۴}(m+۱)$

$\log_{۲^۳}^{۳^۲ \times ۲} = m \rightarrow \dfrac{۱}{۳}\log_۲^{۳^۲\times ۲} = m \rightarrow \log_۲^{۳^۲} + \log_۲^۲ = ۳m \rightarrow \log_۲^{۳^۲} = ۳m-۱ \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} \log_۴^۹ = \dfrac{۳m-۱}{۲}$

$\xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} \log_۴^۳ = \dfrac{۳m-۱}{۴}$

$$\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲x-۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲} \rightarrow ۳x^۲ = ۱ - ۲x \rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \quad x \begin{cases} \rightarrow -۱ \\ \rightarrow \frac{۱}{۳} \end{cases}$$ ۸

$$\log_۸^{۹x+۱} \begin{cases} \xrightarrow{x=-۱} \log_۸^{-۸} \text{ غ ق ق} \\ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} \log_۸^{۴} = \boxed{\frac{۲}{۳}} \end{cases}$$

۹

$$\log_۸^b = \frac{۲}{۳}\left(\log_۲^۲ + \log_۲^۳\right) \rightarrow \log_۸^b = \log_{۲^۳}^{۶^۲} \Rightarrow b = ۳۶$$

$$\log_{۱۰}(۳۶ \times ۳ - ۸) = \log_{۱۰}^{۱۰۰} = \boxed{۲}$$

۱۰

$$\frac{۱}{\frac{b}{۴a}} = \log ۴ \rightarrow b = \frac{۴a}{\log ۴}$$

$$۲a = b + c \rightarrow \quad c = ۲a - b$$

$$c = a\left(۲ - \frac{۴}{\log ۴}\right) \rightarrow \frac{c}{a} = ۲ - \frac{۴}{\log ۴}$$

$$\frac{c}{a} = ۲ - ۲\log_۲^{۱۰} \Rightarrow (۲)^{-\frac{۱}{۸} \times (۲ - ۲\log_۲^{۱۰})} = ۲^{\frac{۱}{۴}\log_۲^{۱۰} - \frac{۱}{۴}} =$$

$$\rightarrow ۲^{-\frac{۱}{۴}} \times ۱۰^{\frac{۱}{۴}} = \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{\frac{۱}{۴}} = \boxed{\sqrt[۴]{۵}}$$