آرش سیدی   یازدهم دفتر A تکلیف شماره ۱۱

۱- برد دو تابع نباید هم‌پوشانی داشته باشند $x^3-4=f(x) \to R=(a^3-4,+\infty)$ $\quad 12x-20=f(x) \to R=(-\infty,12a-20]$

$\Rightarrow 12a-20<a^3-4 \to a^3-12a+16\geq 0 \to (a-2)^2(a+4)\geq 0$ $\begin{array}{c|ccc} x & -4 & & 2 \\ \hline & - \ 0 & + & 0 \ + \end{array}$ مضاعف $\Rightarrow a\geq -4$

۲- $f(x)=3x+k \to y=3x+k \to y-k=3x \to x=\frac{y-k}{3} \to y=\frac{x-k}{3} \to f^{-1}(x)=\frac{x-k}{3}$

$\to f^{-1}(2)=4 \to \frac{2-k}{3}=4 \to 2-k=12 \to k=-10$

الف) $f(7)=3(7)-10=21-10=11$ $\qquad$ ب) $f(f(x))=3(3x-10)-10=9x-40$

۳- $f(x)=\frac{ax}{x-1} \to y=\frac{ax}{x-1} \to yx-y=ax \to (y-a)x=y \to x=\frac{y}{y-a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-a}$

$\to A(2a,a) \to \frac{2a}{2a-a}=a \to \frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}}=a \to a=2$

۴- الف) $fof^{-1}=\{(5,5)(7,7)(2,2)(6,6)\}$

ب) $f^{-1}of=\{(3,3)(4,4)(7,7)(9,9)\}$

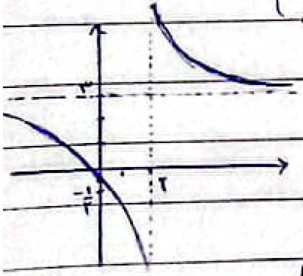
ج) $fog^{-1}=\{(3,5)(5,6)\}$

د) $g^{-1}of=\{(3,6)(7,3)(9,8)\}$

۵- $g^{-1}=\{(1,2)(3,4)(5,6)\} \to fog^{-1}=\{(1,4)(3,8)(5,0)\}$

$\frac{h}{fog^{-1}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{h}{fog^{-1}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{h}{fog^{-1}}=\frac{1}{0}=$ تن ق $\Rightarrow \frac{h}{fog^{-1}}=\{(1,\frac{1}{2})(3,\frac{1}{2})\}$

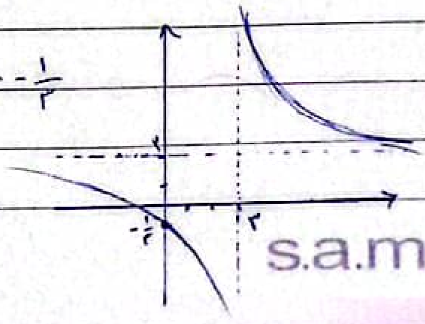
۶- $y=\frac{3x+1}{x-2} \to \begin{cases} \text{مجانب قائم} \to \text{ریشه مخرج}=x \to x=2 \\ \text{مجانب افقی} \to \frac{a}{c}=y \to 3=y \end{cases}$ $\to x=0 \to y=-\frac{1}{2} \to A\left|\begin{smallmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right.$



تابع یک به یک ✓ $\to y=\frac{3x+1}{x-2} \to yx-2y=3x+1 \to (y-3)x=2y+1$

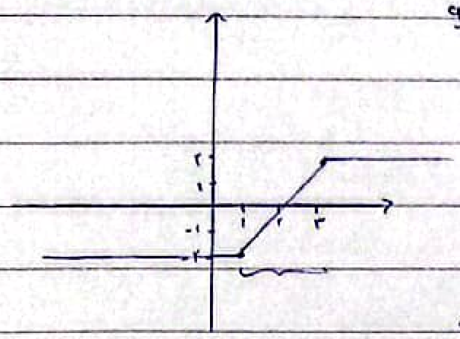
$\to x=\frac{2y+1}{y-3} \to f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

$y=\frac{2x+1}{x-3} \to \begin{cases} \text{مجانب افقی} \to \frac{a}{c}=y \to 2=y \\ \text{مجانب قائم} \to \text{ریشه مخرج}=x \to 3=x \end{cases}$ $\to x=0 \to y=-\frac{1}{3}$



s.a.m

۷-
$y=|x-1|-|x-3| \Rightarrow \Big|_{-2}^{1} \quad \Big|_{2}^{3} \quad \Big|_{-2}^{0} \quad \Big|_{2}^{4}$



$\Rightarrow [a,b] \to [1,3] \to a=1 \quad b=3$

$y=|x-1|-|x-3| \,,\, x\in[1,3] \to y=x-1-3+x=2x-4$

$y=2x-4 \to 2x=y+4 \to x=\frac{y+4}{2} \to 1\leq \frac{y+4}{2} \leq 3$

$\to y\in[-2,2] \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+4}{2} \,,\, x\in[-2,2]$

۸-
بردها هم‌پوشانی ندارند یک‌به‌یک است

$x^3+4=y \to R=[5,+\infty) \qquad 4x-1=y \to R=(-\infty,-1]$

$y=x^3+4 \to x^3=y-4 \to x=\sqrt[3]{y-4} \xrightarrow{x\geq 1} y\geq 5$

$y=4x-1 \to 4x=y+1 \to x=\frac{y+1}{4} \xrightarrow{x\leq 0} y\leq -1$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-4} & x\geq 5\\[2mm] \frac{x+1}{4} & x\leq -1\end{cases}$$

۹-
$f(x)=x^2-\frac{(x+1)^3}{x+3} \to f(x)=\frac{x^3+3x^2-x^3-1-3x^2-3x}{x+3}=\frac{-3x-1}{x+3}$

$\to y=\frac{-3x-1}{x+3} \to yx+3y=-3x-1 \to (y+3)x=-3y-1 \to x=\frac{-3y-1}{y+3} \to y=\frac{-3x-1}{x+3}$

$\to \frac{-3x-1}{x+3}=\frac{ax+b}{2x+d} \to a=-6 \quad b=-2 \quad d=6 \Rightarrow f^{-1}(b)=f^{-1}(-2)=\frac{\overset{6}{-3(-2)}-1}{-2+3}=5$

۱۰-
$y=\frac{x}{x^2+1} \to y(x^2+1)=x \to yx^2+y=x \to yx^2+y-x=0$

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \to a=y \quad b=-1 \quad c=y \to x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y} \,,\, y\neq 0$

تابع بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ مقادیر می‌گیرد ← معکوس تابع روی $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ تعریف می‌شود.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x} & x>0\\[2mm] \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x} & x<0\end{cases} \,,\quad x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$