٢٠

آرشاییدی یازدهم دفتر A تکلیف شماره ۱۱

۱- دو تابع باید هم پوشانی داشته باشند

$x^3-4=f(x) \to R=(a^3-4,+\infty)$ $\quad 12x-20=f(x) \to R=(-\infty,12a-20]$

$\Rightarrow 12a-20 \leq a^3-4 \to a^3-12a+16 \geq 0 \to (a-2)^2(a+4)\geq 0$ $\quad \begin{array}{c|ccccc} x & & -4 & & 2 & \\ \hline & - & 0 & + & 0 & + \end{array}$ مضاعف $\Rightarrow a \geq -4$ ۲

۲- $f(x)=3x+k \to y=3x+k \to y-k=3x \to x=\frac{y-k}{3} \to y=\frac{x-k}{3} \to f^{-1}(x)=\frac{x-k}{3}$

$\to f^{-1}(2)=4 \to \frac{2-k}{3}=4 \to 2-k=12 \to k=-10$ ۵

الف) $f(7)=3(7)-10=21-10=11$ ب) $f(f(x))=3(3x-10)-10=9x-40$

۳- $f(x)=\frac{ax}{x-1} \to y=\frac{ax}{x-1} \to yx-y=ax \to (y-a)x=y \to x=\frac{y}{y-a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-a}$ ۵

$\to A(2a,a) \to \frac{2a}{2a-a}=a \to \frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}}=a \to a=2$

۴- الف) $fof^{-1}=\{(5,5)(7,7)(2,2)(6,6)\}$ ۳

ب) $f^{-1}of=\{(3,3)(4,4)(7,7)(9,9)\}$

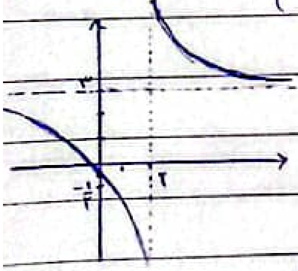
ج) $fog^{-1}=\{(2,5)(5,6)\}$

د) $g^{-1}of=\{(2,9)(7,3)(9,8)\}$

۵- $g^{-1}=\{(1,2)(3,4)(5,6)\} \to fog^{-1}=\{(1,4)(3,8)(5,0)\}$ ۵

$\frac{h}{fog^{-1}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{h}{fog^{-1}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{h}{fog^{-1}}=\frac{1}{0}=$ ن ت ع $\Rightarrow \frac{h}{fog^{-1}}=\{(1,\frac{1}{2})(3,\frac{1}{2})\}$

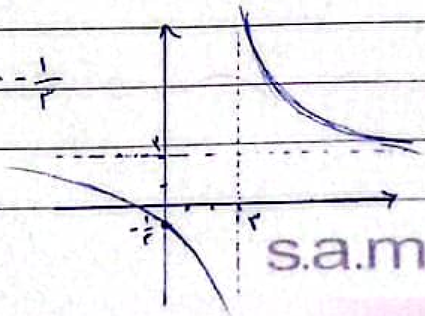
۶- $y=\frac{3x+1}{x-2} \to$ { مجانب قائم → ریشه مخرج = x → $x=2$ ؛ مجانب افقی → $\frac{a}{c}=y \to 3=y$ } $\to x=0 \to y=-\frac{1}{2} \to A\begin{vmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$ ۵



تابع یک به یک $\to y=\frac{3x+1}{x-2} \to yx-2y=3x+1 \to (y-3)x=2y+1$

$\to x=\frac{2y+1}{y-3} \to f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-3}$

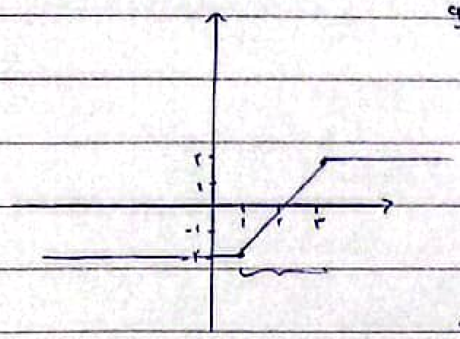
$y=\frac{2x+1}{x-3} \to$ { مجانب افقی → $\frac{a}{c}=y \to 2=y$ ؛ مجانب قائم → ریشه مخرج = x → $3=x$ } $\to x=0 \to y=-\frac{1}{3}$



s.a.m

۷-

$y = |x-1| - |x-3| \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}$



$\Rightarrow [a,b] \to [1,3] \to a=1 \quad b=3$ ۲

$y = |x-1| - |x-3| , x \in [1,3] \to y = x-1-3+x = 2x-4$

$y = 2x-4 \to 2x = y+4 \to x = \frac{y+4}{2} \to 1 \leq \frac{y+4}{2} \leq 3$

$\to y \in [-2,2] \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2} , x \in [-2,2]$

۸- بردها هم‌پوشانی ندارند پس یک‌به‌یک است

$x^3+4=y \to R=[5,+\infty) \qquad 4x-1=y \to R=(-\infty,-1]$

$y=x^3+4 \to x^3=y-4 \to x=\sqrt[3]{y-4} \xrightarrow{x\geq 1} y\geq 5$

$y=4x-1 \to 4x=y+1 \to x=\frac{y+1}{4} \xrightarrow{x\leq 0} y\leq -1$ ۳

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-4} & x\geq 5 \\ \frac{x+1}{4} & x\leq -1 \end{cases}$$

۹-

$f(x) = x^2 - \frac{(x+1)^3}{x+3} \to f(x) = \frac{x^3+3x^2-x^3-1-3x^2-3x}{x+3} = \frac{-3x-1}{x+3}$

$\to y = \frac{-3x-1}{x+3} \to yx+3y = -3x-1 \to (y+3)x = -3y-1 \to x = \frac{-3y-1}{y+3} \to y = \frac{-3x-1}{x+3}$ ۲

$\to \frac{-3x-1}{x+3} = \frac{ax+b}{2x+d} \to a=-6 \quad b=-2 \quad d=6 \Rightarrow f^{-1}(b) = f^{-1}(-2) = \frac{-3(-2)-1}{-2+3} = 5$

۱۰-

$y = \frac{x}{x^2+1} \to y(x^2+1) = x \to yx^2+y = x \to yx^2+y-x=0$ ۴

$\Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \to a=y \quad b=-1 \quad c=y \to x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y} , y\neq 0$

تابع بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ مقادیر می‌گیرد ← معکوس تابع روی $[-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}]$ تعریف می‌شود.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x} & x>0 \\ \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x} & x<0 \end{cases} , x \in [-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}]$$