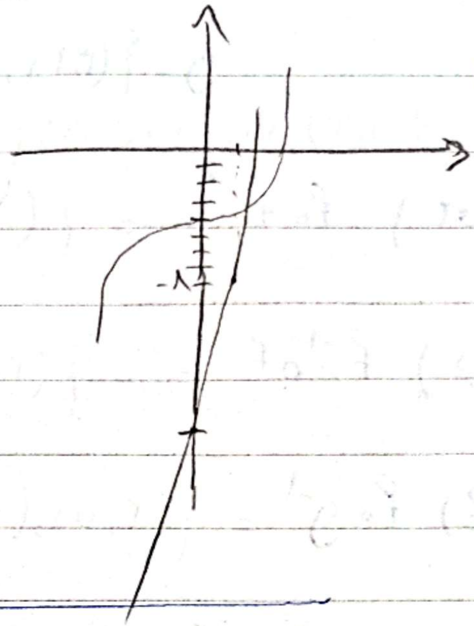
(۱)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4 & ; x > a \\ 12x - 20 & ; x \leqslant a \end{cases}$$




$$x^3 - 4 = 12x - 20$$

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

$$x(x^2 - 12) = -16$$

$x = 2$ , $x = -4$ غ ق ق

$$\Rightarrow \boxed{a \geqslant 2}$$

(۲)

$f(x) = 3x + k$ $\qquad f^{-1}(2) = 4$

الف) $f(7) =$

$y = 3x + k \longrightarrow f^{-1}(x) \rightarrow x = 3y + k \rightarrow \frac{x-k}{3} = y \xrightarrow{x=2} \frac{2-k}{3} = 4$

$2 - k = 12 \rightarrow$

$k = -10$

$f(x) = 3x - 10 = 3 \times 7 - 10 = \boxed{11}$

ب) $f(f(x)) = f(3x - 10) = 3(3x - 10) - 10 = 9x - 30 - 10 = \boxed{9x - 40}$

(۳)

$A(2a, a)$ , $f(x) = \frac{ax}{x-1}$ $\qquad a = ?$

$f^{-1}(x) \rightarrow x = \frac{ay}{y-1} \rightarrow ay = xy - x \rightarrow ay - xy = -x \rightarrow y(a - x) = -x \rightarrow$

$y = \frac{x}{x-a} \xrightarrow[y=a]{x=2a} a = \frac{2a}{a} \Rightarrow \boxed{a = 2}$

④ $f = \{(3,5),(4,7),(7,2),(9,6)\}$ $g = \{(3,2),(8,6),(9,5)\}$

$g^{-1} = \{(2,3),(6,8),(5,9)\}$ / $f^{-1} = \{(5,3),(7,4),(2,7),(6,9)\}$

الف) $f \circ f^{-1} = \{(5,5),(7,7),(2,2),(6,6)\}$

ب) $f^{-1} \circ f = \{(3,3),(4,4),(7,7),(9,9)\}$

ج) $f \circ g^{-1} = \{(2,5),(5,6)\}$

د) $g^{-1} \circ f = \{(7,3),(9,8),(3,9)\}$

---

⑤ $h = \{(1,2),(3,4),(4,1),(5,11)\}$, $g = \{(2,1),(4,3),(6,5)\}$, $f = \{(2,4),(4,8),(6,0)\}$ را داشته باشیم، حاصل $\dfrac{h}{f \circ g^{-1}}$ را بدست آرید.

$g^{-1} = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

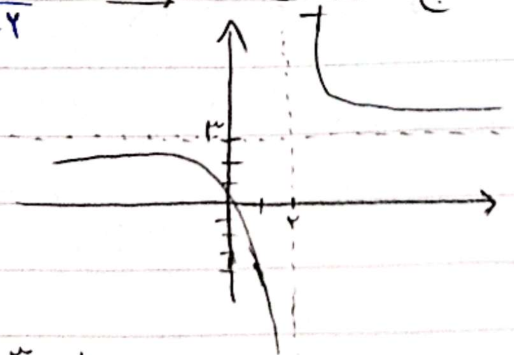
$$\frac{\{(1,2),(3,4),(4,1),(5,11)\}}{\{(1,4),(3,8),(5,0)\}} = \{(1,\tfrac{1}{2}),(3,\tfrac{1}{2}),\cancel{(5,\tfrac{11}{0})}\} \rightarrow$$

$$\frac{h}{f \circ g^{-1}} = \{(1,\tfrac{1}{2}),(3,\tfrac{1}{2})\}$$

---

⑥ $y = \dfrac{3x+1}{x-2} \rightarrow$ تابع هموگرافیک $\dfrac{a}{c} = 3$ $\Rightarrow$ تابع معکوس‌پذیر است.

$x=1 \rightarrow y = \frac{4}{-1} = -4$



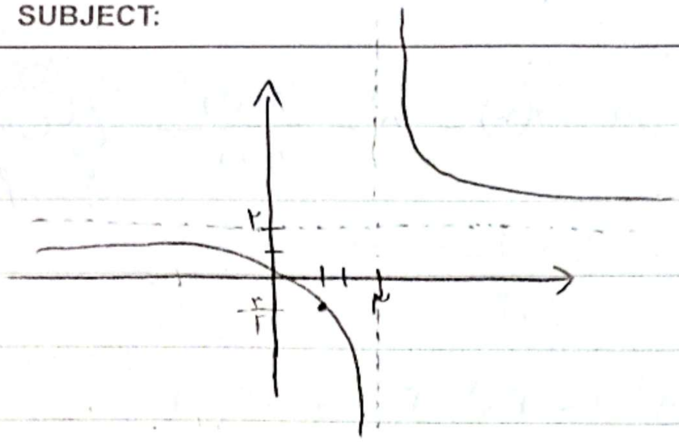
معکوس

$\rightarrow x = \dfrac{3y+1}{y-2} \rightarrow 3y+1 = xy - 2x \rightarrow xy - 2x - 3y - 1 = 0$

$y(x-3) = 2x+1 \rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x-3}$

نمودار $y=\frac{2x+1}{x-2}$ :

$x=1 \to y=\frac{3}{-1}$



۷) $f(x)=|x-1|-|x-3|$ در بازه $[a,b]$ وارون پذیره . اگر طول بازه حداکثر مقدار ممکن باشد، ضابطه‌ی تابع معکوس در این بازه را به دست بیار.

$a=1$ , $3=b$

$-x+1+x-3=-2$ | $x-1+x-3=2x-4$ | $x-1-x+3=2$

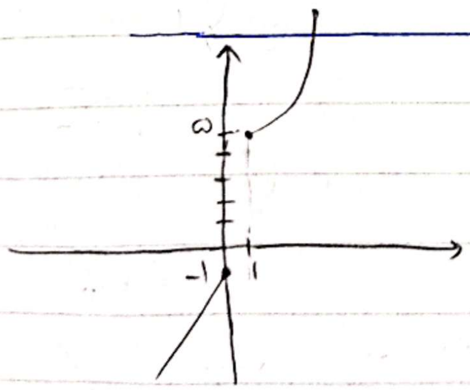
$(-2)$ , $(2)$

$[a,b]=[1,3]$

$D_{f^{-1}}=R_f$

$D_{f^{-1}}=[-2,2]$

$y=2x-4 \xrightarrow{\text{معکوس}} x=2y-4 \to \frac{x+4}{2}=y \to y=\frac{1}{2}x+2$



۸) $f(x)=\begin{cases} x^3+4 & ; x\geq 1 \\ 4x-1 & ; x\leq 0 \end{cases}$

تابع وارون پذیر هست

$y=x^3+4 \to x=y^3+4 \to y=\sqrt[3]{x-4} \quad ; x\geq 5$

$y=4x-1 \to x=4y-1 \to y=\frac{x+1}{4} \quad ; x\leq -1$

DATE / / SUBJECT:

۹) ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 - \dfrac{(x+1)^3}{x+3}$ به صورت $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{2x+d}$ است. حاصل $f^{-1}(b)$ ؟

وارون $x = y^2 - \dfrac{(y+1)^3}{y+3} \rightarrow \dfrac{y^2(y+3) - (y+1)^3}{y+3} = x$

$x(y+3) = \cancel{y^3} + \cancel{3y^2} - \cancel{y^3} - 1 - \cancel{3y^2} - 3y = -3y - 1 \rightarrow$

$x = \dfrac{-3y-1}{y+3} \rightarrow xy + 3x = -3y - 1 \rightarrow y(x+3) = -1 - 3x \rightarrow y = \dfrac{-3x-1}{x+3}$

$\dfrac{-3x-1}{x+3} = \dfrac{ax+b}{2x+d} = \dfrac{-6x-2}{2x+6} \Rightarrow b = -2 \qquad f^{-1}(-2) = \dfrac{6-1}{-2+3} = \boxed{5}$

۱۰) ضابطه معکوس تابع $f$ به ضابطه $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ ؟

$y = \dfrac{x}{x^2+1} \xrightarrow{\text{معکوس}} x = \dfrac{y}{y^2+1} \rightarrow y = xy^2 + x \rightarrow xy^2 + x - y = 0$

$xy^2 - y + x = 0$

$y = \dfrac{+1 \pm \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \qquad 1 - 4x^2 \geq 0 \rightarrow 1 \geq 4x^2$

$\dfrac{1}{4} \geq x^2 \rightarrow$

$\dfrac{1}{2} \geq x$

$x = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \leftarrow -\frac{1}{2} \leq x$

مورد قبول

$y = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$