ماهک میرمعتمدی

۱۹,۵

$$f(x)=\begin{cases} x^3-4 & x>a \\ 12x-20 & x\le a \end{cases} \Longrightarrow$$

۱ ← د

$$x^3-4=12x-20 \rightarrow x^3-12x+16=0 \xrightarrow[\text{تعیین}]{\text{نامساوی}} (a-2)^2(a+4)\geq 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{a \geq -4}$$

---

۲ ← د

$$f(x)=3x+k \qquad f^{-1}(2)=4 \rightarrow f(4)=2$$

$$2=12+k \rightarrow k=-10$$

الف

$$f(x)=3x-10 \rightarrow f(7)=21-10=\boxed{11}$$

ب

$$f(f(x))=3(3x-10)-10=9x-30-10=\boxed{9x-40}$$

---

۳ ← د

$$y=\frac{ax}{x-1} \rightarrow x=\frac{ay}{y-1} \rightarrow xy-x=ay$$

$$y(x-a)=x \rightarrow y=\frac{x}{x-a} \rightarrow$$

$a = \frac{۲a}{۲a-a} = \boxed{a = ۲}$

۴ ←

$g = \{(۳,۲),(۸,۶),(۹,۵)\} \rightarrow g^{-1} = \{(۲,۳),(۶,۸),(۵,۹)\}$

$f = \{(۳,۵),(۴,۷),(۷,۲),(۹,۶)\} \rightarrow f^{-1} = \{(۵,۳),(۷,۴),(۲,۷),(۶,۹)\}$

$\boxed{f(f^{-1}(x)) = \{(۵,۵),(۷,۷),(۲,۲),(۶,۶)\}}$ ← الف

$\boxed{f^{-1}(f(x)) = \{(۳,۳),(۴,۴),(۷,۷),(۹,۹)\}}$ ← ب

$\boxed{f(g^{-1}(x)) = \{(۲,۵),(۵,۶)\}}$ ← ج

$\boxed{g^{-1}(f(x)) = \{(۳,۹),(۷,۳),(۹,۸)\}}$ ← د

$f = \{(2,4),(4,8),(6,0)\}$ $\quad h = \{(1,2),(3,4),(4,1),(5,1)\} \leftarrow 5$

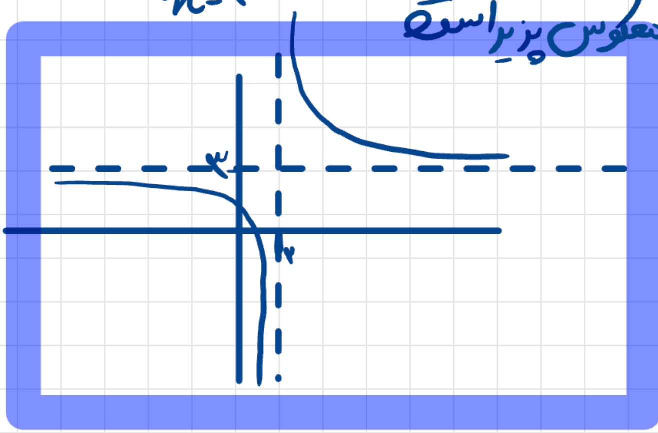
$g = \{(2,1),(4,3),(6,5)\} \to g^{-1} = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$

۲

$$\frac{h}{f(g^{-1}(x))} \to \boxed{\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{2}\right)\right\}}$$

$$\to \{(1,4),(3,8),(5,0)\}$$

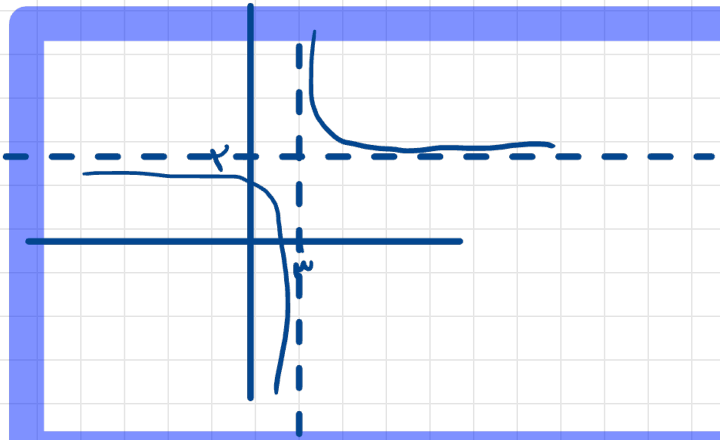
$y = \dfrac{3x+1}{x-2} \to$ تابع هموگرافیکه پس قطعاً یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر است $\leftarrow 4$

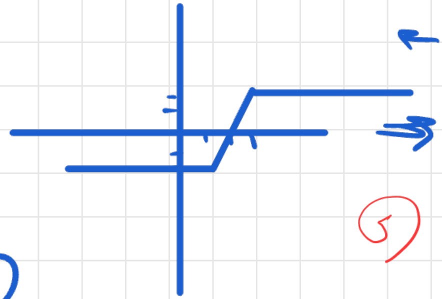


$\to x = \dfrac{3y+1}{y-2} \to$

۲

$$y(x-3) = 2x+1 \to \boxed{y = \frac{2x+1}{x-3}}$$





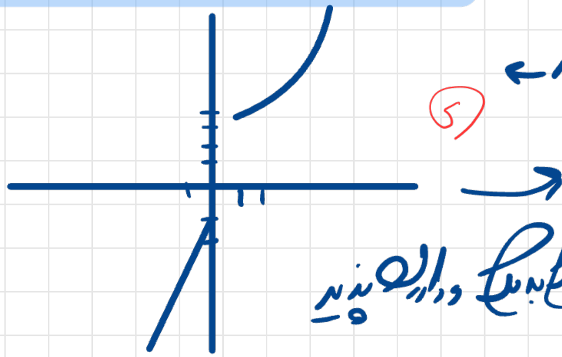
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 3 \\ 2x-4 & 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 & x \leqslant 1 \end{cases}$$

← ۷

د

در بازه $[1,3]$ ← تابع یک به یک و وارون پذیر است

$$y = 2x - 4 \Rightarrow x = 2y - 4 \rightarrow x + 4 = 2y \rightarrow \boxed{y^{-1} = \frac{x+4}{2}}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 4 & x \geqslant 1 \\ 2x - 1 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

← ۸

د

تابع یک به یک و وارون پذیر

$y = x^3 + 4 \to x \geq 1 \to R_f = [5, +\infty)$

$x = y^3 + 4 \to y \geq 5$

$y^3 = x - 4 \to y = \sqrt[3]{x-4} \quad , y \geq 5$

$y = 4x - 1 \to x \leq 0 \to R_f = (-\infty, -1]$

$x = 4y - 1 \to y \leq -1 \to 4y = x + 1 \to$

$y = \dfrac{x+1}{4} \quad , y \leq -1$

$$\Longrightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-4} \ , & x \geq 5 \\ \dfrac{x+1}{4} \ , & x \leq -1 \end{cases}}$$

$(x+1)^3 \to x^3 + 1 + 3x + 3x^2$

$f(x) = x^2 - \dfrac{(x+1)^3}{x+3} \to \dfrac{\cancel{x^3} + \cancel{3x^2} - \cancel{x^3} - 1 - 3x + \cancel{3x^2}}{x+3} \to$ $\leftarrow 9$

$y = \dfrac{-3x-1}{x+3} \to xy + 3y = -3x - 1 \to x(y+3) = -3y - 1$

$\to y^{-1} = \dfrac{-3x-1}{x+3} \xrightarrow[\times 2]{} y^{-1} = \dfrac{-6x-2}{2x+6} \to \begin{matrix} a = -6 \\ b = -2 \\ d = 6 \end{matrix}$

$f^{-1}(-2) = ? \to f^{-1}(-2) = \dfrac{6-1}{-2+3} = \boxed{5}$

---

۱۰ $\leftarrow$ $y = \frac{x}{x^2+1} \to y(x^2+1) = x \to yx^2 - x + y = 0$

۱,۵

$yx^2 + y = x \to yx^2 + y - x = 0 \to$ چون f در R یک به یک نیست

برد $f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ، دامنه $= [-1, 1]$ $\xrightarrow{f^{-1}}$ دامنه $= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ، برد $= [-1, 1]$

$$\left.\begin{array}{l} yx^2 + y - x = 0 \\ \Delta = 1 - 4y^2 \end{array}\right\} \to \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} = x \xrightarrow{y \neq 0}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x} = y^{-1} \xrightarrow{x \neq 0} \boxed{f^{-1}(y) = \frac{2x}{1+\sqrt{1-4x^2}} \;,\; x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$$

$$\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$$