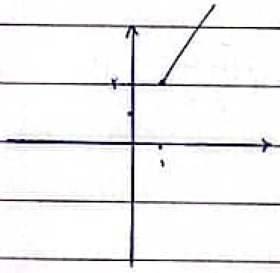
آزمایشی یازدهم دفتر A تکلیف شماره ۱۰

۱- $f=\{(3,2)(n,5)(3,n^2-n)(m,2)(-1,4)\} \to n^2-n=2 \to n^2-n-2=0 \to \cancel{n=-1}\ n=2$
$\Rightarrow m=3,\ n=2$

$f=\{(-1,1)(1,2)(2,3)(a,m-1)(a+2,n)(m,3)\} \to m=2 \Rightarrow a=-1 \to n=2$

۲- 



$3x-1\ ;\ x\geq 1 \to R=[2,+\infty)$
$x+a\ ;\ x<1 \to R=(-\infty,1+a)$
$\Rightarrow 1+a\leq 2 \to a\leq 1$

۳- $3x-1\ ;\ x\geq 1 \to R=[2,+\infty)$
$ax+a-1\ ;\ x<0 \to$ a نمی‌تواند منفی یا صفر باشد $\to R=(-\infty,a-1]$
$\Rightarrow a-1<2 \to a<3$

۴- الف) $y=x^3+2 \to y_1=y_2 \to x_1=x_2 \Rightarrow x_1^3+2=x_2^3+2 \to x_1=x_2$ ✓

محاسبه معکوس: $x^3=y-2 \to x=\sqrt[3]{y-2} \to y=\sqrt[3]{x-2} \to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$

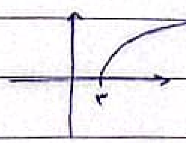
ب) $y=x^2-4x+2 \to$ ضابطه سهمی است بنابراین یک‌به‌یک نیست

۵- الف) $y=\frac{3x+1}{x-2} \to$ هموگرافیک یک‌به‌یک است

محاسبه معکوس: $yx-2y=3x+1 \to yx-3x=1+2y \to x(y-3)=1+2y \to x=\frac{1+2y}{y-3} \to y=\frac{1+2x}{x-3}$
$\to f^{-1}(x)=\frac{1+2x}{x-3}$

ب) $y=\frac{4+2x}{x+2} \to y=\frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} \to y=2$ یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر نیست.

۶- الف) $y=\sqrt{x-3}$ یک‌به‌یک است



محاسبه معکوس: $x=\sqrt{y-3} \to x^2=y-3 \to x\geq 3 \to f^{-1}(x)=x^2+3 \quad x\geq 0$

s.a.m

ب) $y = x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 \to y = x^2 - 4x + 4 - 1 \to y = (x-2)^2 - 1 \to (x-2)^2 = y + 1$

$\to x - 2 = \pm\sqrt{y+1} \to x = 2 \pm \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

$D=[2,+\infty)$ چون نمی‌تواند منفی باشد

---

ـ۷ $y = x + \sqrt{x} \to x = y + \sqrt{y} \xrightarrow{\sqrt{y} = n} x = n^2 + n \to n^2 + n - x = 0 \to n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$

$\sqrt{y} \geq 0 \to n = \frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2}$ $\xrightarrow{n = \sqrt{y} \,،\, n^2 = y} y = \left(\frac{\sqrt{1+4x} - 1}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{4x + 2 - 2\sqrt{1+4x}}{4}$

$\to y = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x} \to y = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}} \Rightarrow f^{-1}(x) = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

$a = 1 \quad b = \frac{1}{2} \quad c = -\frac{1}{4} \Rightarrow a + 2b + 4c = 1 + 1 - 1 = 1$

---

ـ۸ $y_1 = y_2 \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 2}} \to \frac{x_1^2}{x_1^2 - 2} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 2} \Rightarrow x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 2x_2^2$

$\to x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \xrightarrow{\text{و نمی‌تواند آنها قرینه باشند}} x_1 = x_2$

محاسبه وارون: $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} \to x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 2}} \to x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 2} \Rightarrow x^2 y^2 - 2x^2 = y^2$

$\to x^2 y^2 - y^2 = 2x^2 \to y^2(x^2 - 1) = 2x^2 \to y^2 = \frac{2x^2}{x^2 - 1} \to y = \pm\sqrt{\frac{2x^2}{x^2 - 1}} \to y = \frac{\sqrt{2}\, x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$x$ و $y$ هم علامت هستند.

---

ـ۹ $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \longrightarrow R = [0, 1) \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \longrightarrow R = (-1, 0) \end{cases} \xrightarrow{\cup} (-1, 1) = R$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{2}{3}$

s.a.m

$g(x) = \sqrt{x} - 1 \rightarrow$ [illegible] $: \; y = \sqrt{x} - 1 \rightarrow x = \sqrt{y} - 1 \rightarrow x + 1 = \sqrt{y}$

$\rightarrow y = (x+1)^۲ \rightarrow g^{-1}(x) = (x+1)^۲$

$\rightarrow g^{-1}(-\frac{۲}{۵}) = \frac{۹}{۲۵}$

$f(-\frac{۲}{۵}) + g^{-1}(-\frac{۲}{۵}) = -\frac{۲}{۳} + \frac{۹}{۲۵} = \frac{-۵۰ + ۲۷}{۷۵} = \frac{-۲۳}{۷۵}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[۳]{x - 1} \rightarrow f(x) = x^۳ + 1$ ۱۰-

$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} = x^۳ + 1 + \sqrt{x^۳ + 1} \rightarrow g(x) = ۱۲$

$\Rightarrow x^۳ + 1 + \sqrt{x^۳ + 1} = ۱۲ \xrightarrow{\sqrt{x^۳+1} = n} n^۲ = x^۳ + 1 \rightarrow n^۲ + n = ۱۲ \rightarrow n^۲ + n - ۱۲ = ۰$

$\rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + ۴۸}}{۲} = \frac{-1 \pm ۷}{۲} \rightarrow n = ۳ \quad \cancel{n = -۴} \times \rightarrow n \geq ۰ \Rightarrow n = ۳$

$\sqrt{x^۳ + 1} = ۳ \rightarrow x^۳ + 1 = ۹ \rightarrow x^۳ = ۸ \rightarrow x = ۲$

$\Rightarrow g^{-1}(۱۲) = ۲$