تکلیف شماره ۱۵ احمد وارثی

۱۹

۱-

الف) $f=\{(۳,۲),(n,۵),(۳,n^۲-n),(m,۲),(-۱,٤)\}$

$n^۲-n=۲\to n^۲-n-۲=۰$ $\to n=-۱\to$ غ ق ق $\xrightarrow{\text{چون}}(-۱,٤)$

$\to \boxed{n=۲}\to$ قابل قبول

$(۳,۲)(m,۲)\to \boxed{m=۳}$

۲

ب) $f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(a,m-۱),(a+۲,n),(m,۳)\}$

$(۲,۳)(m,۳)\to \boxed{m=۲}\to(a,m-۱)=(a,۱)$

$(-۱,۱)(a,۱)\to \boxed{a=-۱}\to(۱,n)\to \boxed{n=۲}$

۲-

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۱\ ; & x\ge ۱\\ x+a\ ; & x<۱\end{cases}$$

$a=?\to a\le ۱$

۳

$۳x_۲-۱=x_۱+a$ if $x_۲\ge ۱\to x_۱=۳x_۲-۱-a\to ۳x_۲-۱-a<۱\to ۳x_۲-a-۲<۰$

$\to ۳\times ۱-a-۲=۱-a\to a\le ۱$ اگر $\to$ قابل قبول

۳-

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۱\ ; & x\ge ۱\\ ax+a-۱\ ; & x\le ۰\end{cases}$$

$a=?\to ۰\le a<۳$

۱,۷۵

$ax_۱+a-۱=۳x_۲-۱\to ax_۱+a=۳x_۲\to x_۱=\frac{۳x_۲-a}{a}\to a\ne ۰$

$\to$ چون $x_۱\le ۰\to \frac{۳x_۲-a}{a}\le ۰\to a>۰$ و $۳x_۲-a\le ۰\to a\ge ۳\to$ غیر قابل قبول

$\to ۰<a<۳$ و $۳x_۲-a>۰\to$ قابل قبول

$\to a<۰$ و $۳x_۲-a\ge ۰\to$ غیر قابل قبول

$\to a=۰\to$ ثابت $\to f(x)=-۱\to a=۰\to$ قابل قبول

محدوده نهایی: $۰\le a<۳$

۴-

الف) $y=x^۳+۲\to x_۱<x_۲\to x_۲^۳-x_۱^۳=(x_۲-x_۱)(x_۲^۲+x_۱x_۲+x_۱^۲)$

$\to y=x^۳+۲\to x=\sqrt[۳]{y-۲}$

$\downarrow$ وارون‌پذیر است.

۲

ب) $y=x^۲-٤x+۲$

$f(x)=(x-۲)^۲-۲\to f(۲+t)=(t)^۲-۲=t^۲-۲$ $\to$ یک به یک نیست

$(x-۲)^۲=y+۲\to x=۲+\sqrt{y+۲}$ if $x\ge ۲$ $\xrightarrow{\text{زیر رادیکال}}$ $y+۲\ge ۰\to y\ge -۲$

$\to x=۲-\sqrt{y+۲}$ if $x\le ۲$

تکلیف شماره ۱۰ احمد مارانی

۵- الف) $y=\frac{۳x+۱}{x-۲}$ $x\neq ۲$ $\rightarrow$ if $f(x_۱)=f(x_۲) \rightarrow \frac{۳x_۱+۱}{x_۱-۲}=\frac{۳x_۲+۱}{x_۲-۲}$

$(۳x_۱+۱)(x_۲-۲)=(۳x_۲+۱)(x_۱-۲) \rightarrow ۳x_۱x_۲-۶x_۱+x_۲-۲=۳x_۱x_۲-۶x_۲+x_۱-۲$

$\hookrightarrow -۶x_۱+x_۲=-۶x_۲+x_۱ \rightarrow -۷x_۱+۷x_۲=۰ \rightarrow x_۱=x_۲ \rightarrow$ یک به یک

$\hookrightarrow$ معکوس $=\frac{۲y+۱}{y-۳}$ $y\neq ۳$

۲

ب) $y=\frac{۴+۲x}{x+۲}$

$۴+۲x=۲(x+۲) \rightarrow x\neq -۲ \rightarrow \frac{۲(x+۲)}{x+۲}=۲ \longrightarrow$ یک به یک نیست

۶- الف) $y=\sqrt{x-۳} \longrightarrow$ تابع صعودی $\rightarrow$ یک به یک

$x-۳\geq ۰ \longrightarrow x\geq ۳$

معکوس $\rightarrow y^۲+۳$, $y\geq ۰$

۲

ب) $y=x^۲-۴x+۳,\ x\in[۲,+\infty]$

$x^۲-۴x+۳=(x^۲-۴x+۴)-۱=(x-۲)^۲-۱$ if $x\geq ۲ \rightarrow$ تابع صعودی $\rightarrow$ یک به یک

معکوس $\rightarrow ۲+\sqrt{y+۱}$, $y\geq -۱$

۷- $f(x)=x+\sqrt{x}\ \in (۰,+\infty) \rightarrow f^{-۱}(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$

$a+۲b+۴c=?$

۲

$y=f(x)=x+\sqrt{x} \rightarrow x=f^{-۱}(y) \rightarrow y=t^۲+t \rightarrow t^۲+t-y=۰$

$t=\frac{-۱+\sqrt{۱+۴y}}{۲}$, $t>۰ \rightarrow x=t^۲=\left(\frac{-۱+\sqrt{۱+۴y}}{۲}\right)^۲ \longrightarrow$ معکوس $=x+\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۱+۴x}}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-۱}(x)=ax+b-\sqrt{x-c} \\ f^{-۱}(x)=x+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۴x} \end{array}\right\} a=۱,\ b=\frac{۱}{۲},\ c=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow a+۲b+۴c=۱+۱-۱=۱$$

۸- ۱,۷۵

$y=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۲}} \longrightarrow x^۲-۲>۰ \rightarrow x^۲>۲ \rightarrow x>\sqrt{۲}$ یا $x<-\sqrt{۲} \rightarrow$

$D=(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(\sqrt{۲},+\infty)$

$\hookrightarrow$ if $x>\sqrt{۲} \rightarrow$ نزولی $\rightarrow$ قابل قبول

if $x<-\sqrt{۲} \rightarrow$ نزولی $\rightarrow$ قابل قبول

} در کل تابع یک به یک

معکوس $\rightarrow \sqrt{\frac{۲y^۲}{y^۲-۱}}$ $y>۱$

$\hookrightarrow -\sqrt{\frac{۲y^۲}{y^۲-۱}}$ $y<۱$

x و y هم علامتند پس نیازی به ± نیست

احمد رازی   کلید تشریحی ۱۰

-۱۰

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$ ، $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ $\quad g^{-1}(12) \to 3,\ \to -4$

۱,۵

$y=\sqrt[3]{x-1} \to x-1=y^3 \to x=y^3+1 \to f(x)=x^3+1$

$g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}=(x^3+1)+\sqrt{x^3+1} \to a=2$

$g(a)=12 \to a^3+1+\sqrt{a^3+1}=12 \to t+\sqrt{t}=12 \to t=u^2$

$\hookrightarrow u^2+u=12 \to u^2+u-12=0 \to u=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm7}{2}$

$u_1=3 \quad u_2=-4$

-۹

$f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|}$ ، $g(x)=\sqrt{x}-1 \to y+1=\sqrt{x} \to x=(y+1)^2$

$f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5}) \to g^{-1}(-\frac{2}{5})=(-\frac{2}{5}+1)^2=(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$

۲

$\frac{t}{1+|t|}=-\frac{2}{5} \to \text{if } t\geq 0 \to \frac{t}{1+t}\geq 0 \neq -\frac{2}{5}$

$\hookrightarrow \text{if } t<0 \to |t|=-t \to \frac{t}{1-t}=-\frac{2}{5} \to f(-\frac{2}{5})=-\frac{2}{3}$

مجموع $\Rightarrow -\frac{2}{3}+\frac{9}{25}=\frac{-50+27}{75}=\boxed{-\frac{23}{75}}$