نام و نام خانوادگی ......ترنم اسیان...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۱۵... کلاس ......A......

۱

الف) $f=\{(3,2)(\cancel{n},5)(3,\cancel{n^2-n})(\cancel{m},2)(-1,4)$

$\rightarrow (3,2) \rightarrow (3, n^2-n) \rightarrow n^2-n=2 \rightarrow \boxed{n=2}$

$\rightarrow (3,2) \rightarrow (m,2) \rightarrow \boxed{m=3}$

ب) $f=\{(-1,1)(1,2)(2,3)(a,m-1)(a+2,n)(m,3)\}$

$\rightarrow (2,3) \rightarrow (m,3) \rightarrow \boxed{m=2}$

$\rightarrow (a,m-1) \rightarrow m-1 \rightarrow 1 \rightarrow (-1,1)$

$\rightarrow \boxed{a=-1}$

$\rightarrow (a+2,n) \rightarrow a+2 \rightarrow 1 \rightarrow (1,2) \rightarrow \boxed{n=2}$

۲

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geq 1 \rightarrow f(1)=(1,2) \\ x+a & \underline{x<1} \rightarrow f(1)=(1,1+a) \rightarrow 1+a=2 \rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

$\nearrow a\geq 1 \xrightarrow{if} a=2 \rightarrow (0,2) \rightarrow$ یک به یک نیست

$\searrow a\leq 1 \xrightarrow{if} f(-3)=-3+1=-2$ ✓ درست

$a=-1 \rightarrow (0,-1)$ ✓

$\longrightarrow \boxed{a\leq 1}$

۳

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geq 1 \rightarrow (1,2),(2,5) \\ ax+a-1 & x\leq 0 \rightarrow ax+a-1\neq 2 \rightarrow ax+a\neq 3 \rightarrow a(x+1)\neq 3 \rightarrow a<3 \end{cases}$$

$\longrightarrow \boxed{a<3}$

۴

الف) $y=\underbrace{x^3+2} \rightarrow x^3=y-2 \rightarrow x=\sqrt[3]{y-2} \rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-2} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}}$

$f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2 \rightarrow x_1^3+2=x_2^3+2 \longrightarrow x_1^3=x_2^3 \rightarrow x_1=x_2 \rightarrow$ یک به یک است

ب) $y=x^2-4x+2 \rightarrow f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2 \rightarrow y>\min(f) \rightarrow x_1\neq x_2 \rightarrow$ یک به یک نیست ✗

min دارد

۵

الف) $y=\dfrac{3x+1}{x-2} \rightarrow f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2 \rightarrow \dfrac{3x_1+1}{x_1-2}=\dfrac{3x_2+1}{x_2-2}$

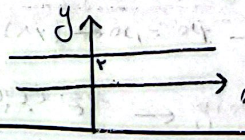
$\rightarrow 3x_1x_2-6x_1+x_2-2=3x_1x_2-6x_2+x_1-2$

$\longrightarrow -6x_1+x_2=-6x_2+x_1 \rightarrow -6x_1+x_2-x_1+6x_2=0 \rightarrow -7x_1+7x_2=0$

$\rightarrow x_1=x_2 \rightarrow$ یک به یک است

معکوس $=y(x-2)=3x+1 \rightarrow x(y-3)=2y+1 \rightarrow y=\dfrac{2x+1}{x-3}$

ب) $\dfrac{4+2x}{x+2}=2 \longrightarrow$



$\longrightarrow$ ✗ یک به یک $\longrightarrow$ وارون پذیر هم ✗

$y=\sqrt{x-3} \to f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2 \to \sqrt{x-3}=\sqrt{x-3} \to x-3=x-3$

$\to x=x \to$ ✓ یک به یک است $\to y=\sqrt{x-3} \to y^2=x-3 \to x=y^2+3 \to f^{-1}(x)=x^2+3 \to x\geq 0$ ۶

$y=x^2-4x+3\ ,\ x\in[2,+\infty) \to f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2 \to x^2-4x+3=x^2-4x+3$

$\to x(x-4)=x(x-4) \to x-4=x-4 \to x_1=x_2 \to$ ✓ یک به یک $\to f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}\ ,\ x\in[-1,+\infty)$

$f(x)=\overset{t^2}{x}+\overset{t}{\sqrt{x}} \to (0,+\infty) \to y=t^2+t \to t^2+t-y=0 \to t=\frac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$

$f^{-1}(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$ $\quad \xrightarrow{t=\sqrt{x}\geq 0}$ (+) قبول $\to \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2} \to x=t^2=\left(\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)^2$

$a+2b+4c=?$

$\to x=y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{1+4y}}_{\sqrt{4(y+\frac{1}{4})}=2\sqrt{y+\frac{1}{4}}} \to f^{-1}(y)=y+\frac{1}{2}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}$ ۷

$ax+b-\sqrt{x-c}$

$\xrightarrow[x \text{ به } y]{\text{تغییر متغیر از}} f^{-1}(x)=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} \to \boxed{a=1\ ,\ b=\frac{1}{2}\ ,\ c=-\frac{1}{4}} \to 1+1-1=1$

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \to \frac{x_1^2}{x_1^2-4}=\frac{x_2^2}{x_2^2-4} \to \cancel{x_1^2x_2^2}-4x_1^2=\cancel{x_2^2x_1^2}-4x_2^2$

$\to x_1^2=x_2^2 \to x_1=\pm x_2 \xrightarrow[\text{اینکه ظاهراً ورودی هم علامت هستند}]{\text{با توجه به}} x_1=x_2$ ✓ یک به یک ۸

$x^2=+\frac{2y^2}{y^2-1}=y^2=\frac{2x^2}{x^2-1} \to y=\pm\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[\text{هم علامت}]{y\ \text{و}\ x} y=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2-1}}$

$f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|} \to f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x} & x\geq 0\\ \frac{x}{1+x} & x<0\end{cases} \to \frac{-\frac{2}{5}}{1+(-\frac{2}{5})}=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{2}{3}$

$g(x)=\sqrt{x}-1 \to y=\sqrt{x}-1 \to y+1=\sqrt{x} \to x=(y+1)^2 \to g^{-1}(x)=(x+1)^2$ ۹

$f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5}) \quad \to g^{-1}(\frac{2}{5})=(-\frac{2}{5}+1)^2=(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$

$\Rightarrow -\frac{2}{3}+\frac{9}{25}=\frac{-50+27}{75}=-\frac{23}{75}$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1} \to f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-1}=x \to y-1=x^3 \to y=x^3+1 \to f(x)=x^3+1$

$g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)} \quad \to x^3+1+\sqrt{x^3+1} \to x^3+1+\underbrace{\sqrt{x^3+1}}_{}=12 \to y^2+y=12$

$y^2=x^3+1$

$g^{-1}(12)$ $\quad \to y^2+y-12=0 \to \frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}$ → 3 ✓ , -4 ✗ $\to y=\sqrt{x^3+1}\geq 0 \to \boxed{y=3}$ ۱۰

$\to y^2=x^3+1 \to 9=x^3+1 \to x^3=8 \to x=2 \to \boxed{g^{-1}(12)=2}$