تکلیف شماره ۱۰ — کهراز مدرسی — یازدهم تجربی A

① الف) $f=\{\overbrace{(۳,۲),(n,۵),(۳,n^۲-n),(m,۲)}^{m=۳},(-۱,۴)\}$

$n^۲-n=۲\to$ ~~[illegible]~~ $n^۲-n-۲=۰\to(n-۲)(n+۱)=۰$

$\boxed{n=۲}\longleftarrow\begin{cases}n=۲\\ \boxed{n=-۱}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$

چون $(-۱,۴)$ را داریم.

ب) $f=\{(-۱,۱),\underbrace{(۱,۲),(۲,۳),(\overset{۱}{a},m-۱),(a+۲,n),(m,۳)}_{m=۲}\}$

$a=-۱$

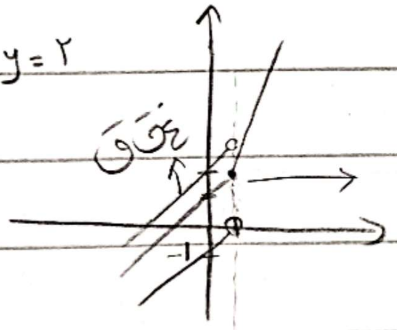
$m-۱=۱\to m=۲$

$a+۲=۱$

$n=۲$

② $f(x)=\begin{cases}۳x-۱\ ;\ x\geq۱\\ x+a\ ;\ x<۱\end{cases}$

$x=۱\to y=۲$



$a_{max}=۱$

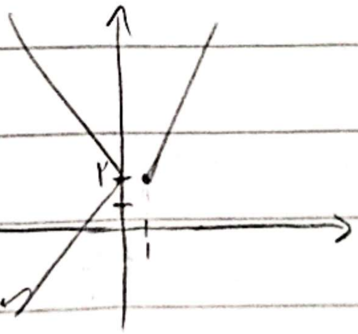
$a=(-\infty,۱]$

③ $f(x)=\begin{cases}۳x-۱\ ;\ x\geq۱\\ ax+a-۱\ ;\ x\leq۰\end{cases}$

$x=۱\to y=۲$

$a<۰$ باشد تابع یک به یک نیست X

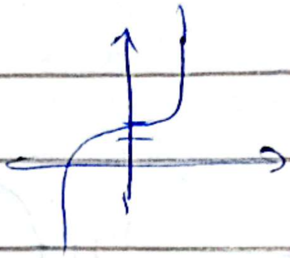
$a-۱<۲\to a<۳$



$a=(۰,۳)$

④

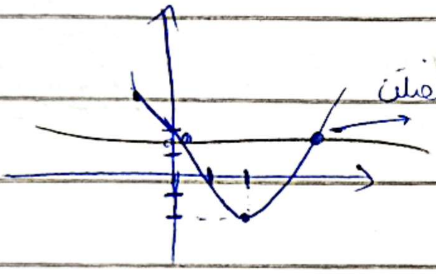
الف) $y = x^3 + 2$



⟸ یک به یک هست ✓

$x = y^3 + 2 \rightarrow y^3 = x - 2 \rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$

ب) $y = x^2 - 4x + 2 \rightarrow \text{ext} \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \\ 4 - 8 + 2 = -2 \end{array} \right.$



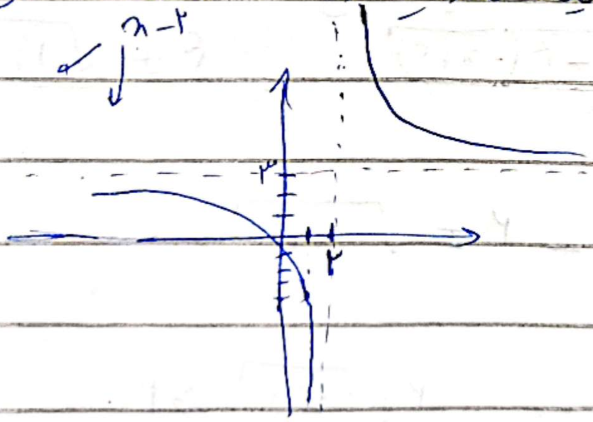
یک به یک نیست به ازای ~~[illegible]~~ دو نقطه [illegible]
نشان می دهد

⑤

الف) $y = \frac{3x+1}{x-2} \rightarrow$ تابع یک به یک است هموگرافیک ✓

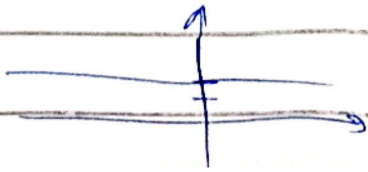
مجانب افقی $\frac{a}{c} = 3$

$x = 1 \rightarrow y = \frac{4}{-1} = -4$



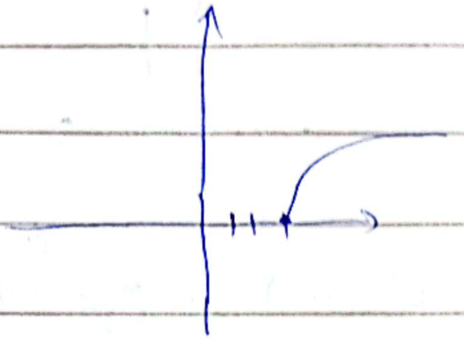
$x = \frac{3y+1}{y-2} \rightarrow y = \frac{+2x+1}{+x-3}$

ب) $y = \frac{4+2x}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} = 2$ تابع ثابت $y=2$ ⟺ یک به یک نیست ✗



④

الف) $y = \sqrt{x-۳}$

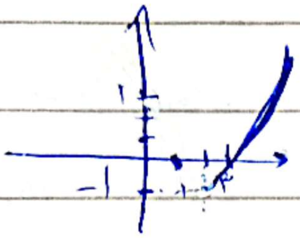


یک به یک هست ✓

$$x = \sqrt{y-۳} \rightarrow x^۲ = y-۳ \rightarrow y = x^۲+۳$$

ب) $y = \underbrace{x^۲ - ۴x + ۳}_{(x-۳)(x-۱)} , \quad x \in [۲, +\infty)$

$x=۲ \rightarrow y = ۴ - ۸ + ۳ = -۱$



یک به یک می باشد ✓

$$x = y^۲ - ۴y + ۳ \rightarrow y^۲ - ۴y - x + ۳ = ۰$$

$$y = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۴(-x+۳)}}{۲} = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ + ۴x - ۱۲}}{۲}$$

$$= \frac{۴ \pm \sqrt{۴x+۴}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{x+۱}$$

$$D_{\text{تابع اول}} = R_{\text{تابع دوم}} \Rightarrow ۲ \underset{\text{نمی‌تواند منفی باشد}}{\pm} \sqrt{x+۱} \geq ۲$$

$$\Rightarrow y = ۲ + \sqrt{x+۱}$$

⑦

$f(x) = x + \sqrt{x} \rightarrow (0, +\infty)$

$f^{-1}(x) = ax + b - \sqrt{x - c}$

$a + 2b + 4c = ? \quad = \boxed{1}$

$f^{-1}(x) = y + \sqrt{y} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \rightarrow$

$x + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} \rightarrow$

$\sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \rightarrow y = x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow y = \underbrace{x}_{a=1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{b=\frac{1}{2}} - \sqrt{x \underbrace{+\frac{1}{4}}_{c=\frac{-1}{4}}}$

$1 + 2 \times \frac{1}{2} + \left(4 \times \frac{-1}{4}\right) = 1 + 1 - 1 = \boxed{1}$

⑧

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$ مخرج ⊕

$\Leftarrow$ y, x هم‌علامت اند $\Leftarrow$

$\rightarrow y = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 2}}$

$y = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 2}}$

$x_1 = \pm x_2 \rightarrow$ ⊖ غیرقابل قبول

$\Downarrow$

$x_1 = x_2$

تابع یک به یک هست ✓

$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 2}} = \frac{x_1^2}{x_1^2 - 2} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 2}$

$\cancel{x_1^2 x_2^2} - 2x_2^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 2x_1^2 \Rightarrow -2x_2^2 = -2x_1^2$

$x_1 = \pm x_2 \Leftarrow x_2^2 = x_1^2$

$$x=\frac{y}{\sqrt{y^۲-۲}}\longrightarrow x^۲=\frac{y^۲}{y^۲-۲}\longrightarrow x^۲y^۲-۲x^۲=y^۲$$

$$x^۲y^۲-y^۲-۲x^۲=۰\longrightarrow (x^۲-۱)y^۲=۲x^۲$$

$$y=\sqrt{\frac{۲x^۲}{x^۲-۱}}\longleftarrow y^۲=\frac{۲x^۲}{x^۲-۱}$$

$$y=\frac{\pm x\sqrt{۲}}{\sqrt{x^۲-۱}}\Longrightarrow \boxed{y=\frac{x\sqrt{۲}}{\sqrt{x^۲-۱}}}$$

x و y هم علامت
اند (منفی
نمی‌تونه باشه

⑨

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{۱+|x|}\ ,\ g(x)=\sqrt{x}-۱$$

$$f\left(\frac{-۲}{۵}\right)+g^{-1}\left(\frac{-۴}{۵}\right)=?\qquad \frac{-۲}{۳}+\frac{۹}{۲۵}=\frac{-۵۰+۲۷}{۷۵}=\boxed{\frac{-۲۳}{۷۵}}$$

$$x=\frac{y}{۱+|y|}\longrightarrow x+x|y|-y=۰\longrightarrow$$

$$y\geq ۰\quad x=y-xy\rightarrow$$

$$x=(۱-x)y$$

$$\frac{x}{۱-x}=y$$

$$y<۰\quad x=y+xy$$

$$x=(۱+x)y$$

$$y=\frac{-۲}{۵}\Rightarrow y=\frac{\frac{-۲}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=\boxed{\frac{-۲}{۳}}\qquad \longleftarrow \frac{x}{۱+x}=y$$

$$y=\sqrt{x}-۱ \xrightarrow{g^{-۱}(x)} x=\sqrt{y}-۱ \longrightarrow \sqrt{y}=x+۱$$

$$y=(x+۱)^{۲} \longrightarrow g^{-۱}\left(-\frac{۲}{۵}\right)=\left(-\frac{۲}{۵}+۱\right)^{۲}=\frac{۹}{۲۵}$$

(۱۰)

$$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$$

$$g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$$

$$g^{-۱}(۱۲)=?$$

$$y=\sqrt[۳]{x-۱} \xrightarrow{f^{-۱}(x)} x=\sqrt[۳]{y-۱} \rightarrow y-۱=x^{۳} \rightarrow y=x^{۳}+۱$$

$$f(x)=x^{۳}+۱$$

$$\rightarrow g(x)=x^{۳}+۱+\sqrt{x^{۳}+۱}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}=\left(\sqrt{x^{۳}+۱}+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{g^{-۱}(x)} x=\left(\sqrt{y^{۳}+۱}+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

$$x+\frac{۱}{۴}=\left(\sqrt{y^{۳}+۱}+\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \rightarrow$$

$$\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{y^{۳}+۱}+\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲}=\sqrt{y^{۳}+۱}$$

$$\left(\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=y^{۳}+۱ \rightarrow y=\sqrt[۳]{\left(\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-۱}$$

$$\xrightarrow{x=۱۲} \sqrt[۳]{\left(\sqrt{\frac{۴۹}{۴}}-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-۱}=\sqrt[۳]{\left(\frac{۷}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-۱}=\sqrt[۳]{۹-۱}=\sqrt[۳]{۸}=(۲)$$