نام و نام خانوادگی ...بیتا جمالی... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۱... کلاس ...یازدهم A...

۱

الف) $f(3)=2$ ، $f(m)=2$ $\xrightarrow{\text{چون } y_1=y_2}$ تابع یک‌به‌یک است $(f(x))$ پس $x_1=x_2$ $\to m=3$,

$f(3)=2$ ، $f(3)=n^2-n$ $\xrightarrow{\text{تابع است } (f(x))}$ $n^2-n=2 \to n^2-n-2=0$ ، $n=-1$, $n=2$ ✓

$\{(2,5),(3,2),(4,-1),(5,-1)\}$ شرط تابع بودن برقرار نیست ∝

$(x_1=x_2 \to y_1=y_2)$

ب) $f(2)=3$ ، $f(m)=3$ $\xrightarrow{\text{تابع یک‌به‌یک است } (f(x))}$ $2=m$ ، $y_1=y_2$ پس $x_1=x_2$

$f(a)=m-1$ ، $f(-1)=1$ $\xrightarrow{\text{تابع یک‌به‌یک است } (f(x))}$ $a=-1$

$f(a+2)=n$ ، $f(1)=2$ $\xrightarrow{\text{تابع است } (f(x))}$ $2=n$

۲

چون تابع $f(x)$ یک‌به‌یک است اشتراک برد دو ضابطه برابر $\varnothing$ است:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 \ ; \ x\geq 1 \to R_1=[2,+\infty) \\ x+a \ ; \ x<1 \to x<1 \to x+a<1+a \to R_2=(-\infty,1+a) \end{cases}$$

$1+a\leq 2$ ، $a\leq 1 \to (-\infty,1]$

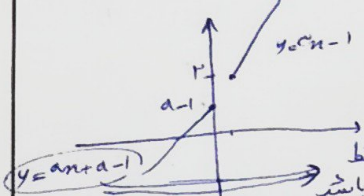
شرط دوم برای یک‌به‌یک بودن، یک‌به‌یک بودن هر ضابطه به صورت جداگانه است که چون هر دو خط با شیب مثبت هستند این شرط برقرار است.

۳

$$\begin{cases} 3x-1 \ ; \ x\geq 1 \to R_1=[2,+\infty) \\ ax+a-1 \ ; \ x\leq 0 \to x\leq 0 \to ax+a-1\leq a-1 \end{cases}$$

$R_2=(-\infty,a-1]$

$a-1<2$ ، $a<3$ (I) $\to (-\infty,3)$



برای حتما باید شیب خط یک‌به‌یک بودن مثبت باشد $\to a>0$ (II) $\to (0,+\infty)$

(I) $\cap$ (II) $\to a\in(0,3)$

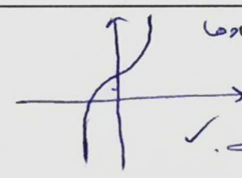
۴

الف) $y=x^3+2 \to x=y^3+2$

$x-2=y^3$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$

رسم شکل ←

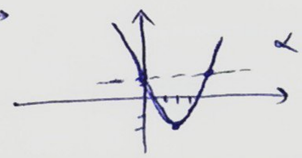


هر خطی موازی محور x ها رسم کنیم شکل را در یک نقطه قطع می‌کند پس تابع یک‌به‌یک است. ✓

ب) $y=x^2-4x+2 \to ext \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2 \\ 4-8+2=-2 \end{array}\right.$ رسم شکل ←

$x=0 \to y=2$

$x=3 \to 9-12+2 = -1 = y$



یک‌به‌یک ∝

۵

الف) $y=\dfrac{3x+1}{x-2} \to x=0 \to y=-\dfrac{1}{2}$

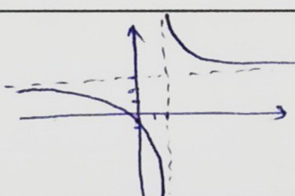
مجانب قائم $x=2$

مجانب افقی $y=3$

$x=\dfrac{2y+1}{y-2}$

$y=-\left(\dfrac{-2x-1}{+x-3}\right)$

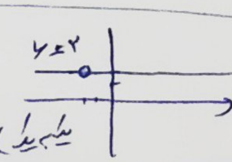
$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$



تابع یک‌به‌یک است ✓

ب) $y=\dfrac{2x+4}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x+2}=2$

$(x\neq -2)$

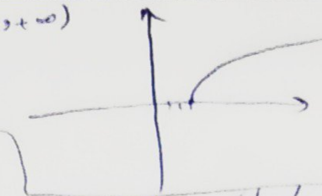


یک‌به‌یک ∝

۶

الف) $y=\sqrt{x-3}$ $R_f = D_{f^{-1}} = [0,+\infty)$

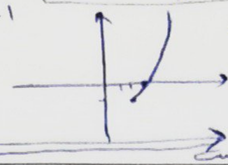
$x=\sqrt{y-3} \to x^2 = y-3 \to f^{-1}(x) = x^2+3$



نیم نمودار ✓

ب) $y = x^2-4x+3 \ , \ x \in [2,+\infty)$ $\alpha \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \\ 4-8+3 = -1 \end{array} \right.$

$x=2 \to y = 9-12+3 = 0$



نیم نمره نمودار ✓

$x = y^2-4y+3+1-1 \to (x-2)^2-1 \to x-2 = \pm\sqrt{y+1}$

$x = \pm\sqrt{y+1}+2 \longrightarrow \boxed{f^{-1}(x) = +\sqrt{x+1}+2 \quad R_f = D_{f^{-1}} = [-1,+\infty)}$

برد تابع اولیه برابر با دامنه تابع $f^{-1}(x)$ پس فقط حالت مثبت قابل قبول است

۷

$f(x) = y = x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \Rightarrow y = (\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \to x = (\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \Rightarrow \pm\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} = \sqrt{y}$

نامنفی است پس فقط حالت مثبت قابل قبول است ⇐

$f^{-1}(x) = y = x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} \Leftarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$

$ax+b-\sqrt{x-c} = x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$a=1 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=-\frac{1}{4} \Rightarrow 1+2(\frac{1}{2})+4(-\frac{1}{4}) = 1$

۸

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \xrightarrow{()^2} \frac{x^2}{x^2-2} = y^2 \longrightarrow x^2 = y^2x^2-2y^2 \to 2y^2 = y^2x^2-x^2 = x^2(y^2-1)$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}} \Leftarrow x = +\sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1}} \Leftarrow \pm\sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1}} = x \Leftarrow \frac{2y^2}{y^2-1} = x^2$

(x و y هم علامت اند)

بررسی یک به یک بودن $\rightarrow \left.\begin{array}{l}(x_1,y)\in f\\(x_2,y)\in f\end{array}\right\}$ $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \to \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \to \cancel{x_2^2x_1^2}-2x_2^2 = \cancel{x_1^2x_2^2}-2x_1^2$

$-2x_2^2 = -2x_1^2$

پس یک به یک است $(x_2=x_1)$ چون x_2 و y هم علامت هستند ⇐ $x_2 = \pm x_1 \Leftarrow x_2^2 = x_1^2$

$x_2 = -x_1$

۹

$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$

چون دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر با برد تابع $f^{-1}(x)$ است پس:

$f(-\frac{2}{5}) = a = -\frac{2}{3}$

$f^{-1}(a) = -\frac{2}{5} \to \frac{a}{1+|a|} = \frac{-2}{5} \to -2-2|a| = 5a \to$ ① $a>0 \to -2-2a = 5a \to 7a = -2 \to$ $a = -\frac{2}{7}$ ✗ ⇐ $\varnothing = ① \cap ②$

② $a<0 \to -2+2a = 5a \to 3a = -2$ → ② $a = -\frac{2}{3}$ ✓ ⇐ $① \cap ②$ ⇐ $a = -\frac{2}{3}$

$g^{-1}(-\frac{2}{5}) = b = \frac{9}{25}$

$g(b) = \frac{-2}{5} \to \sqrt{b}-1 = \frac{-2}{5} \to \sqrt{b} = \frac{-2}{5}+1 = \frac{3}{5} \to b = \frac{9}{25}$

$f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3}+\frac{9}{25} = \frac{-50+27}{75} = -\frac{23}{75}$

۱۰

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \to x = \sqrt[3]{y-1} \to x^3 = y-1 \to y = x^3+1 = f(x)$

$y = \sqrt[3]{x-1}$

$g(x) = x^3+1+\sqrt{x^3+1} \Rightarrow a^3+1+\sqrt{a^3+1} = 12 \Rightarrow t^2+t = 12 \Rightarrow t^2+t-12 = 0$

$\sqrt{a^3+1} = t$

$\sqrt{a^3+1} = -4$ ✗ ⇐ $t = -4$

$(a=2)$ ✓ ⇐ $\sqrt{a^3+1} = 3$ ⇐ $t = 3$

$g^{-1}(12) = a = 2$

$g(a) = 12$