ماهان میرمقتدایی ←

۱- الف $m = 3$

$n^2 - n = 2 \to n^2 - n - 2 = 0 \to n = -1 \to (3,-1) \to (-1,5),(-1,4)$ ✗

$n = 2$

$\to \boxed{n = 2}$

۱- ب ← $m = 2$

$m - 1 = 1 \to a = -1$

$-1 + 2 = 1 \to \boxed{n = 2}$

۲ ←

$3x - 1 \to x \geq 1 \xrightarrow{R} x \geq 1 \to 3x \geq 3 \to 3x - 1 \geq 2$

$x + a \to x < 1 \xrightarrow{R} x < 1 \to x + a < 1 + a$

$1 + a < 2 \to \boxed{a \leq 1}$

۳ ←

$3x - 1 \to x \geq 1 \to 3x \geq 3 \to 3x - 1 \geq 2$

$ax + a - 1 \to x \leq 0 \to ax \leq 0 \to ax + a - 1 \leq a - 1$

$a - 1 \leq 2 \to a < 3$

$a > 0$ ← دو تابع باید همسو باشند ← $a = 0$ هم نمی‌تواند باشد

$\to \boxed{0 < a < 3}$

۴ ← الف

$y = x^3 + 2 \to \left.\begin{array}{l} y = x_1^3 + 2 \\ y = x_2^3 + 2 \end{array}\right\} \to x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2$

$\to x_1 = x_2 \to$ یک به یک است

$x = y^3 + 2 \to x - 2 = y^3 \to \boxed{y^{-1} = \sqrt[3]{x-2}}$

۴ ← ب

$y = x^2 - 4x + 2 \to y = x^2 - 4x + 4 - 2 \to$

$y = (x-2)^2 - 2 \to \left.\begin{array}{l} y = (x_1-2)^2 - 2 \\ y = (x_2-2)^2 - 2 \end{array}\right\} \to (x_1-2)^2 - 2 = (x_2-2)^2 - 2$

$\to x_1 - 2 = \pm(x_2 - 2)$

$\to$ یک به یک نیست

۵ ← الف

$y = \dfrac{3x+1}{x-2} \xrightarrow[\text{هموگرافیک}]{\text{تابع}}$ تابع یک به یک است

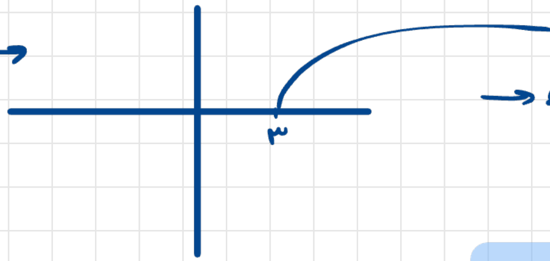
$yx - 2y = 3x + 1 \to x(y-3) = 2y + 1 \to$

$x = \dfrac{2y+1}{y-3} \to \boxed{y^{-1} = \dfrac{2x+1}{x-3}}$

$y = \frac{4+2x}{x+2} \rightarrow y = \frac{2(2+x)}{x+2} \rightarrow y = 2$ ۵ ← ب ←

→ $\boxed{\text{تابع یک به یک نیست}}$

$y = \sqrt{x-3} \rightarrow$



۶ ← الف ← → تابع یک به یک است

$x = \sqrt{y-3} \rightarrow x^2 = y-3 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow \boxed{y^{-1} = x^2+3 \,,\, x \geq 0}$

$y = x^2 - 4x + 3 \,,\, x \in [2, +\infty)$ ۶ ← ب ←

$\rightarrow y = x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 \rightarrow y = (x-2)^2 - 1 \rightarrow$

$\left.\begin{aligned} y &= (x_1-2)^2-1 \\ y &= (x_2-2)^2-1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{[2,+∞) است}]{\text{و در دامنه}}$ تابع یک به یک است

$y = (x-2)^2 - 1 \rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y+1} \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+1}$

غلط ← چون $D = [2, +\infty)$ بود

$\boxed{y^{-1} = 2 + \sqrt{x+1} \quad x \geq -1}$

$$f(x) = x + \sqrt{x} \rightarrow (0, +\infty)$$ ←۷

$$x = y + \underbrace{\sqrt{y}}_{t} \rightarrow x = t^2 + t \rightarrow t^2 + t - x = 0$$

$$\rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} \xrightarrow{(0,+\infty)} \frac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} \xrightarrow{y = t^2} \left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1 + 1 + 4x - 2\sqrt{1+4x}}{4} = \frac{2x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2}$$

$$x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4x}}{2} \rightarrow a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{4}$$

$$-\sqrt{\frac{1+4x}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4} + x}$$

$$a + 2b + 4c = 1 + 1 - 1 = \boxed{1}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} \rightarrow y_1 = y_2 \xrightarrow{\text{۲ طرف به توان ۲}}$$ ←۸

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 - 2} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 2} \rightarrow x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 = x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2$$

$$\rightarrow x_2^2 = x_1^2 \rightarrow x_1 = \pm x_2 \longrightarrow$$ ولی ۲ طرف هم علامت‌اند

به توان ۲ رساندیم این طرف‌ها مساوی شده ← $x_1 = x_2$ ← پس تابع یک به یک است

$$x = \frac{y}{\sqrt{y^2-4}} \rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-4} \rightarrow$$

$$x^2y^2 - 4x^2 = y^2 \rightarrow y^2(x^2-1) = 4x^2 \rightarrow \boxed{y = \frac{x\sqrt{4}}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad g^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right) + f\left(\frac{-4}{5}\right) \leftarrow 9$$

$$g(x) = \sqrt{x} - 1$$

$$f^{-1}(x) \longrightarrow f(x) \Longrightarrow \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ 1-x & x < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$x \geq 0 \rightarrow y = \frac{x}{1+x} \rightarrow y(1+x) = x \rightarrow y + xy = x$$

$$x = \frac{y}{1-y} \rightarrow y = \frac{x}{1-x} \quad x \geq 0$$

$$x < 0 \rightarrow y = \frac{x}{1-x} \rightarrow y(1-x) = x \rightarrow y - yx = x$$

$$\rightarrow x = \frac{y}{1+y} \rightarrow y = \frac{x}{1+x} \quad x < 0$$

$g^{-1}(x) \to \sqrt{x}-1=y \to y+1=\sqrt{x} \to$

$(y+1)^2=x \to y=(x+1)^2=g^{-1}(x)$

$\longrightarrow f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5}) \to \dfrac{-\frac{2}{\cancel{5}}}{\underbrace{\cancel{1-\frac{2}{5}}}_{\frac{3}{\cancel{5}}}} + (\underbrace{-\frac{2}{5}+1}_{\frac{3}{5}})^2$

$-\frac{2}{3}+\frac{9}{25}=\dfrac{-50+27}{75}=\boxed{-\dfrac{23}{75}}$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1} \to f(x)= \longrightarrow$ $\leftarrow 10$

$y=\sqrt[3]{x-1} \to y^3=x-1 \to x^3=y-1 \to$

$y=x^3+1 \to f(x)=x^3+1$

$g^{-1}(12) \longrightarrow g(x)=12 \to 12=x^3+1+\underbrace{\sqrt{x^3+1}}_{t}$

$12=t^2+t \to t^2+t-12=0 \to t=3,-4 \to$

$t=\sqrt{x^3+1} \xrightarrow[x\ -4]{t\ \text{غ ق ق}} 3=\sqrt{x^3+1} \to x=2$

$\boxed{g^{-1}(۱۲) = ۲}$