

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| <p>الف) <math>y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow n^2 - n = 2, n \leq 2 / m \leq 3</math><br/> <math>(3, 2), (3, n^2 - n), (m, 2)</math></p> <p>ب) <math>(2, 3), (m, 3) \Rightarrow m \leq 2</math><br/> <math>(a, 2-1) (-1, 1) \Rightarrow a \leq -1</math><br/> <math>(-1+2, n) (1, 2) \Rightarrow n \leq 2</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                               | ۱ |
| <p><math>f(x) = \begin{cases} 3x-1; &amp; x \geq 1 \\ x+a; &amp; x &lt; 1 \end{cases} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} 3(1)-1=2 \\ 1+a &lt; 2 \Rightarrow a &lt; 1 \end{cases}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | ۲ |
| <p><math>f(x) = \begin{cases} 3x-1; &amp; x \geq 1 \\ ax+a-1; &amp; x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &amp;3(1)-1=2 \rightarrow R = [2, +\infty) \\ &amp;ax+a-1 \rightarrow R = (-\infty, a-1] \end{aligned}</math></p> <p><math>a-1 &lt; 2 \Rightarrow a &lt; 3</math></p> <p>و باید <math>a &gt; 0</math> تا تابع صعودی باشد و تابع یک به یک شود.<br/>         همچنین <math>a \neq 0</math> به دلیل اینکه اگر <math>a = 0</math> <math>\Rightarrow a = -1</math> و یک تابع ثابت می شود که یک به یک نیست.</p> <p><math>\Rightarrow a &lt; 3 \cap a &gt; 0 \cap a \neq 0 = 0 &lt; a &lt; 3</math></p> | ۳ |
| <p>الف) <math>y_1 = x_1^3 + 2, y_2 = x_2^3 + 2 \rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2, x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2</math><br/> <math>x^3 = y-2, x = \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}</math></p> <p>ب) تابع معکوس یک به یک می باشد در نتیجه یک به یک می باشد.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | ۴ |
| <p>الف) <math>y = \frac{3x+1}{x-2} \rightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow</math> تابع معکوس افکند است و یک به یک می باشد.</p> <p><math>y(x-2) = 3x+1 \rightarrow x(y-3) = 1+2y \rightarrow x = \frac{1+2y}{y-3}</math> و <math>f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-3}</math></p> <p>ب) <math>y = \frac{2(x-3)}{x-2} \Rightarrow y = 2 \rightarrow</math> تابع یک به یک نیست</p>                                                                                                                                                                                                                                               | ۵ |

$$y_1 = y_2 \rightarrow \sqrt{x_1 - 3} = \sqrt{x_2 - 3} \rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3, x_1 = x_2 \checkmark$$

$$y = \sqrt{x-3} \rightarrow y^2 = x-3, x = y^2+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+3$$

ب) تابع یک به یکی است اما به دلیل اینکه دامنه داده شده است فقط یک است معرود  $x$  ها است تابع یک به یکی باشد.

$$y = x^2(x+3) - 1 \rightarrow y = (x-2)^2 - 1 \rightarrow (x-2)^2 = y+1, x-2 = \pm\sqrt{y+1} \text{ و } x = \pm\sqrt{y+1} + 2$$

لذا به علت دامنه داده شده است ثابت آن را در نظر می گیریم.

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$$

$$y = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \rightarrow \Delta: 1 + 4y, \sqrt{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{1 + 1 + 4y - 2\sqrt{1+4y}}{4} = \frac{2 + 4y - 2\sqrt{1+4y}}{4} = \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2}\sqrt{1+4y} \Rightarrow f^{-1}(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}$$

$$ax + b - \sqrt{x-c} = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{2}} \Rightarrow a=1, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2}$$

$$a + 2b + 4c = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2-2} = \frac{x_2}{x_2^2-2} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} - 2 = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} - 2 \Rightarrow \frac{x_1^2-2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2-2}{x_2^2-2}$$

$$-2x_1^2 = -2x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2-2} \rightarrow y^2 x^2 - 2y^2 = x^2 \rightarrow x^2(y^2-1) = 2y^2 \rightarrow x^2 = \frac{2y^2}{y^2-1}, x = \pm \sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{معکوس}} x = \frac{y}{y+1} \rightarrow y(x+1) = y, y(x-1) = -x, y = \frac{x}{1-x}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} x = \frac{y}{1-y} \rightarrow x-yx = y, y(1+x) = x, y = \frac{x}{1+x}$$

$$g^{-1}(x) \rightarrow \sqrt{x} = y+1 \Rightarrow x = (y+1)^2, g^{-1}(x) = (x+1)^2$$

$$f\left(-\frac{1}{\omega}\right) + g^{-1}\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \frac{-\frac{1}{\omega}}{-\frac{1}{\omega}+1} + \left(-\frac{1}{\omega}+1\right)^2 = \frac{-1}{1-\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{-1+\omega}{\omega^2}$$

$$y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y^3 = x-1 \Rightarrow x = y^3+1, f(x) = x^3+1$$

$$g(x) = x^3+1 + \sqrt{x^3+1} \quad g^{-1}(12) \Rightarrow g(x) = 12 \rightarrow x^3+1 + \sqrt{x^3+1} = 12$$

$$(\sqrt{x^3+1})^2 + \sqrt{x^3+1} - 12 = 0 \rightarrow \sqrt{x^3+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \sqrt{x^3+1} = \frac{-1+7}{2} = 3$$

نیست قابل قبول  $x^3-1 \geq 0$

$$\sqrt{x^3+1} = 3, x^3+1 = 9, x^3 = 8, x = 2 \Rightarrow g^{-1}(12) = 2$$