$D_f: \; x-1>0 \to x>1$ (1)

$\log_2^{x-1} \geq 0 \to x-1 \geq 1 \to \boxed{x \geq 2}$ (2) -۱

$D_g: \; -(x^2-4x+4) \geq 0 \to (x-2)^2 \leq 0 \to \frac{2}{+\;\phi\;+} \to \boxed{x=2} \xrightarrow{g\circ f(x)} \sqrt{\log_2^{x-1}}=2 \to \log_2^{x-1}=4$

$\to x-1=16 \to x=17$ (3) $\xrightarrow{(1),(2),(3)} D_{g\circ f}=\{17\}$

$f\circ g(x)=g\circ f(x) \to \underbrace{2(x^2-3x+8)-5}_{2x^2-6x+11} = \underbrace{(2x-5)^2-3(2x-5)+8}_{=4x^2-26x+48} \to 2x^2-20x+37=0$ -۲

ریشه‌ها: $\alpha,\beta \to \alpha^2+\beta^2 = S^2-2P = 100-2\left(\frac{37}{2}\right) = 63$

$g(f(x)) = 5x^2+7$ -۳

$f(x)=2x$

$\to g(2x)=5x^2+11 \to g(x)=5\left(\frac{x}{2}\right)^2+11 = \boxed{\frac{5x^2+44}{4}=g(x)} \to g(x-7)=\frac{5(x-7)^2+44}{4}$

$= \frac{5x^2-70x+289}{4} \xrightarrow{min} -\frac{b}{2a}=\frac{70}{10}=7 \to \frac{(5\times 49)-(70\times 7)+289}{4} = \frac{44}{4} = 11$

$\left.\begin{array}{l} f(x)=3x-4 \\ f(g(x))=3x^2-6x-1 \end{array}\right\} \to f(g)=3g-4=3x^2-6x-1 \to 3g=3x^2-6x+3 \to g(x)=x^2-2x+1$ -۴

$\to g\circ f(x)=(3x-4)^2-2(3x-4)+1 = 9x^2-24x+16-6x+8+1 = 9x^2-30x+25$

حل $\Rightarrow f-g=-x+5 \xrightarrow[g=1.5f-7]{2g=3f-14} f-1.5f+7=5-x \to -0.5f=-x-2 \to \boxed{f(x)=2x+4}$ -۵

$\to \boxed{g(x)=3x-1} \to f\circ g(x)=2(3x-1)+4=\underline{6x+2} \to 6x+2=0 \to 6x=-2 \to x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}=a$

$f\circ g(x)=9^{\log_3^x}=x^{\log_3^9}=\boxed{x^2}$, $g\circ f(x)=\log_3^{9^x}=x\underbrace{\log_3^9}_{2}=\boxed{2x}$ -۶

$\to f\circ g \leq g\circ f \Rightarrow 2x \geq x^2 \to x^2-2x \leq 0 \to x(x-2)\leq 0 \to \frac{0 \quad\quad 2}{+\;\phi\;-\;\phi\;+} \to [0,2]$ (1)

$\left.\begin{array}{l} D_g: x>0 \\ D_f=\mathbb{R} \end{array}\right\}$ (2) $\xrightarrow[\text{اشتراک}]{(1),(2)}$ جواب: $(0,2] \to$ اعداد طبیعی: $\{1,2\}$

کامران ایری

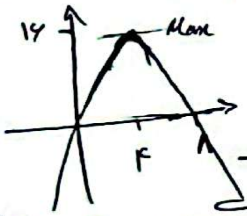
-۷

$$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right)=f\left(x-\frac{2}{x}\right)=\underbrace{x^2+x-4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}_{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+\left(x-\frac{2}{x}\right)\rightarrow f(x)=x^2+x$$

-۸

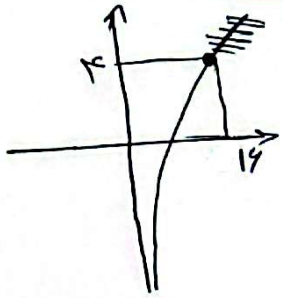
$$f(x)=\log_2^x \quad g(x)=8x-x^2 \quad \left\{ \boxed{fog(x)=\log_2^{-x^2+8x}} \right.$$

$$D_{fog}:\ -x^2+8x>0 \rightarrow \ \underset{-\ \ \ }{} 0 \ \ + \ \ 8 \ \ - \ \rightarrow D_{fog}=(0,8)\ \ A$$



منحنی داده شده در بازه‌ی $(0,8)$ بین ۰ و ۱۶ متغیر است ← یعنی برد آن در دامنه‌ی مورد نظر برابر با $(0,16]$ است

نمودار $\log_2^x$ را می‌کشیم به طوری که $0<x\leq 16$ باشد. ← برد نمودار در این بازه برابر با برد تابع fog یا همان مجموعه‌ی B است :



$$\rightarrow R_{fog}=(-\infty,4]\ \ B$$

$$\Longrightarrow A\cap B=(0,4]$$

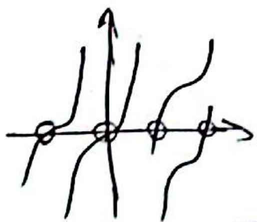
-۹

$$h(g(x))=(x-1)^3+2(x-1)+1=x^3-3x^2+5x-2$$

$$fof(x)=f(f)=1-3f^2 \xrightarrow{f(x)=a} f(a)=1-3a^2 \Longrightarrow \boxed{f(x)=1-3x^2}$$

$$h(g(x))=f(x)\rightarrow 1-\cancel{3x^2}=x^3-\cancel{3x^2}+5x-2\rightarrow x^3+5x-3=0\rightarrow$$

هر معادله‌ی درجه سومی همیشه یک ریشه دارد پس تعداد ریشه‌های معادله یکی



← همه یک ریشه دارند

-۱۰

$$g(3)=8 \xrightarrow[gof=8]{\text{if } f(x)=3} f(x)=3\rightarrow x-\frac{4}{x}=3\rightarrow \boxed{x=4}\rightarrow g(f(4))=8=a\times 4^3+8$$

$$\rightarrow 64a+\cancel{8}=\cancel{8}\rightarrow 64a=0\rightarrow a=0$$

کامیار امینی