امین جلالی

(۱)

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ $\quad D_f = \begin{cases} x-1>0 \to x>1 \ (\mathrm{I}) \\ \log_۲^{x-1} \geq ۰ \Rightarrow x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq ۲ \ (\mathrm{II}) \end{cases} \Rightarrow D_f \xrightarrow{\mathrm{I} \cap \mathrm{II}} [۲, +\infty)$

$D_{g(x)} \to -x^۲+۴x-۴ \geq ۰ \to x^۲-۴x+۴ \leq ۰ \to (x-۲)^۲ \leq ۰ \Rightarrow x = ۲ \to D(gx) = ۲$

$D_{gof} = \{x \in [۲, +\infty) \mid \sqrt{\log_۲^{(x-1)}} = ۲\} \Rightarrow D_{gof} = \{۱۷\}$

(۲)

$fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow ۲(x^۲-۳x+۸)-۵ = \boxed{۲x^۲-۶x+۱۱}$

$gof(x) = g(f(x)) \Rightarrow (۲x-۵)^۲ - ۳(۲x-۵)+۸ = ۴x^۲+۲۵-۲۰x-۶x+۱۵+۸ = \boxed{۴x^۲-۲۶x+۴۸}$

$\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۱۱ = ۴x^۲-۲۶x+۴۸ \Rightarrow ۲x^۲-۲۰x+۳۷ \Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲ = S^۲-۲P$

$\Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \boxed{۱۰}, \quad P = \frac{c}{a} = \boxed{\frac{۳۷}{۲}} \qquad \Rightarrow ۱۰۰ - ۳۷ = \boxed{۶۳}$

(۳)

$f(x) = ۲x \Rightarrow t = ۲x \Rightarrow x = \frac{t}{۲}$

$\Rightarrow g(t) = \frac{۵}{۴}t^۲+۱۱ \Rightarrow g(x) = \frac{۵x^۲}{۴}+۱۱$

چون برد $g(x) = g(x-۷)$ ⇐ فقط دامنه آنها متفاوت می باشد

⇐ کمترین مقدار $g(x)$ را بدست می آوریم. ⇐

$y = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-۵۵}{-۵} = \boxed{۱۱}$ ج

(۴)

$f(x) = ۳x-۴ \to f(g(x)) = ۳g(x)-۴ = ۳x^۲-۶x-۱ = fog(x) \to g(x) = x^۲-۲x+۱$

$gof(x) = (۳x-۴)^۲-۲(۳x-۴)+۱ = ۹x^۲-۲۴x+۱۶-۶x+۸+۱ = \boxed{۹x^۲-۳۰x+۲۵}$

(۵)

$f(x)-g(x) = -x+۵ \to ۲f(x)-۲g(x) = -۲x+۱۰ \xrightarrow{۲g(x)=۳f(x)-۱۴} ۲f(x)-۳f(x)+۱۴ = -۲x+۱۰ \Rightarrow f(x) = ۲x+۴$

$۲g(x) = ۳f(x)-۱۴ \to ۲g(x) = ۶x+۱۲-۱۴ \to g(x) = ۳x-۱ \quad fog(x) = f(g(x)) =$

$۶x-۲+۴ = ۹x+۳ \Rightarrow ۹x+۳ = ۰ \to x = -\frac{1}{۳} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{۳}}$

$fog(x) = f(g(x)) = 9^{\log_3 x} = x^2$ / $gof(x) = g(f(x)) = \log_3 9^x = 2x$ (6)

$\Rightarrow x^2 \leq 2x \longrightarrow x^2 - 2x \leq 0 \longrightarrow$ $\begin{array}{ccccc} & 0 & & 2 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$ $\Rightarrow x \in [0,2]$ (I)

$D_{fog(x)} = \{x \in D_{g(x)} \mid g(x) \in D_{f(x)}\} = \{x > 0 \mid \log_3 x \in \mathbb{R}\} = (0,+\infty)$ (II)

$D_{gof(x)} = \{x \in D_{f(x)} \mid f(x) \in D_{g(x)}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 9^x > 0\} = \mathbb{R}$ (III)

$\xrightarrow{I \cap II \cap III} [0,2] \longrightarrow$ $\boxed{\text{گزینه ۳ صحیح است}}$

$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2} = \frac{(x^2-2)^2 + x(x^2-2)}{x^2}$ (7)

$= \frac{(x^2-2)(x^2-2)}{x \times x} + \frac{x(x^2-2)}{x^2} \xrightarrow{\frac{x^2-2}{x} = t} f(t) = t^2 + t \Rightarrow f(x) = x^2 + x$

$D_{fog} = \{x \in D_{g(x)} \mid g(x) \in D_{f(x)}\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 8x - x^2 > 0 \rightarrow \begin{array}{ccccc} & 0 & & 8 & \\ - & | & + & | & - \end{array}\}$ (8)

$\longrightarrow D_{fog} = (0,8) = A$

$fog(x) = \log_2 (8x - x^2) \longrightarrow$ چون برد $8x-x^2$ در بازهٔ (۰و۸) بازه (۰و۱۶) است و تابع ما در بازهٔ (۰و۴) و (۴و۸) اکیداً صعودی است با جایگذاری دامنه برد به دست می‌آید.

$\left.\begin{array}{ll} x^+ \to 0 & \log_2 0^+ = -\infty \\ x \to 4 & \log_2 16 = 4 \\ x \to 8^- & \log_2 0^+ = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow R_{fog} = (-\infty, 4] = B \quad \Rightarrow A \cap B = (0,4]$

$fof(x) = 1 - 3f^2(x) \xrightarrow{f(x)=t} f(t) = 1 - 3t^2 \rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$

$h(g(x)) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ (9)

$h(g(x)) = f(x) \longrightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 1 - 3x^2 \longrightarrow x^3 + 5x - 3 = 0 \longrightarrow$ چون درجه ۳ است فقط ۱ ریشه دارد

$f(x) = x - \frac{4}{x}$ (10)

$g(3) = 8 \longrightarrow g(3) = g(f(x)) \longrightarrow f(x) = 3 \longrightarrow x - \frac{4}{x} = 3 \longrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$

$\longrightarrow g(f(x)) = ax^3 + 2x \begin{cases} \rightarrow g(f(-1)) = g(3) = -a - 2 = 8 \longrightarrow a = 10 \\ \rightarrow g(f(4)) = g(3) = 64a + 8 = 8 \longrightarrow a = 0 \end{cases}$