

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$
 $\Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow y' = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow$ نقطه بحرانی (اول)
 $\Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow y'' < 0$
 $x > 1 \Rightarrow y'' > 0$

۱

تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را در نظر بگیرید:
 الف) نقاط بحرانی آن را مشخص کنید.
 ب) نمودار آن را رسم کنید.

$y' = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow y' = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \Rightarrow x=1$
 $y'' = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} y'' > 0 ; x > 1 \\ y'' < 0 ; x < 1 \end{cases}$

۲

طول نقاط اکسترمم و نوع آن‌ها را در توابع زیر مشخص کنید.

الف) $y = \frac{-x^2 + 4}{x^2} \Rightarrow y = -\frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3} = -\frac{x+8}{x^3}$
 $y' = 0 \Rightarrow x+8=0 \Rightarrow x=-8$
 $x < -8 : y' < 0 \Rightarrow$ min تابع $(x=-8)$
 $x > -8 : y' > 0$

ب) $y = \frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$
 $\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{3}$
 $x=0 \Rightarrow$ نقطه سرجانی
 $x=\sqrt{3} \Rightarrow$ min
 $x=-\sqrt{3} \Rightarrow$ max

۳

تابع $y = \frac{2x+3}{x-1}$ را در نظر بگیرید.
 الف) مجانب‌ها را مشخص کنید.
 ب) به کمک رسم شکل مشخص کنید از کدام نواحی می‌گذرد؟

$y = \frac{2x+3}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 2x+3 \Rightarrow yx - y = 2x+3 \Rightarrow yx - 2x = y+3 \Rightarrow x(y-2) = y+3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{y-2}$
 \Rightarrow مجانب قائم $x=2$
 \Rightarrow مجانب افقی $y=3$
 $ad-bc = 2(-1) - 3(1) = -2-3 = -5 < 0$ (دست چپ)

۴

نقطه‌ی $(2, 3)$ مرکز تقارن $y = \frac{ax+b}{x-b}$ است.
 الف) a و b را بیابید.
 ب) ضابطه‌ی معکوس تابع را بیابید.

$(2, 3) \Rightarrow x=2, y=3$ مجانب قائم $x=2 \Rightarrow b=2$
 $y=3$ مجانب افقی $\frac{a \cdot 2}{2} = 3 \Rightarrow a=3$

$y = \frac{3x+4}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = 3x+4 \Rightarrow yx - 2y = 3x+4 \Rightarrow yx - 3x = 2y+4 \Rightarrow x(y-3) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-3}$

۵

معادله‌ی محورهای تقارن $y = \frac{3x+1}{x-2}$ را بیابید.

$$y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{مجاذب قائم } x=2 \\ \text{مجاذب افق } y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مراکز } (2, 3)$$

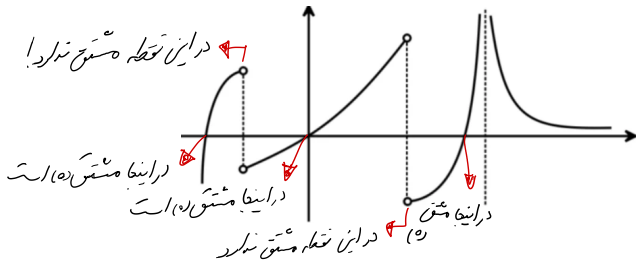
فرمول

$$\Rightarrow y - y_0 = t(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = t(x - 2) \Rightarrow y - 3 = \frac{x - 2}{2} \Rightarrow y = \frac{x - 2}{2} + 3$$

$$y - 3 = \frac{x - 2}{2} \Rightarrow y = \frac{x - 2}{2} + 3$$

۶

اگر نمودار f' به صورت مقابل باشد، تابع بیوسته‌ی آن چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟



۷

حدود a چه باشد تا نمودار تابع $y = |x^2 - ax + 2|$ دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی باشد؟

$$y = |x^2 - ax + 2| \Rightarrow x^2 - (a-2)x + 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \Rightarrow a > 2\sqrt{2}$$

$$a < -2\sqrt{2}$$

۸

$$\Rightarrow a \in \mathbb{R} - [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

حاصل ضرب مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2}$ را بیابید.

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2} \Rightarrow y' = \frac{(x^2+2)(2x+2) - (x^2+x+2)(2x)}{(x^2+x+2)^2} = 0$$

همواره مثبت

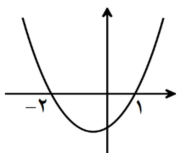
$$\Rightarrow (2x)(x^2+2) - (2x)(x^2+x+2) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 4x - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow -2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{2+2}{2+\sqrt{2}+2} = \frac{4}{4+\sqrt{2}} = \frac{4(4-\sqrt{2})}{16-2} = \frac{16-4\sqrt{2}}{14} = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{2+2}{2-\sqrt{2}+2} = \frac{4}{4-\sqrt{2}} = \frac{4(4+\sqrt{2})}{16-2} = \frac{16+4\sqrt{2}}{14} = \frac{8+2\sqrt{2}}{7}$$

۹

اگر نمودار $y = x^2 + ax + b$ به شکل مقابل باشد، اختلاف طول‌های ماکسیمم نسبی تابع $y = (x^2 + ax + b)^2$ و مینیمم



$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < -1 \\ x_1 x_2 < -2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + x - 2$$

$$y = (x^2 + x - 2)^2$$

نسبی تابع $y = (x^2 + ax + b)^2$ را بیابید.

$$y = (x^2 + x - 2)^2$$

$$\Rightarrow y' = 2(x^2 + x - 2)(2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ max!} \\ x = -2 \text{ min} \\ x = 1 \text{ min} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y' = 2(x^2 + x - 2)^2(2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ min!} \\ x = -2 \text{ فقط جزا} \\ x = 1 \text{ فقط جزا} \end{cases}$$

۱۰