

۱۷، ۲۵

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$   
 $\Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow y' = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow$  نقطه بزرگ (اولی)  
 $\Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow y'' < 0$   
 $x > 1 \Rightarrow y'' > 0$

۱

تابع  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$  را در نظر بگیرید:  
 الف) نقاط بحرانی آن را مشخص کنید.  
 ب) نمودار آن را رسم کنید.

$y' = 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow y' = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \Rightarrow x=1$   
 $y'' = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} y'' > 0 ; x > 1 \\ y'' < 0 ; x < 1 \end{cases}$

تکراری :-

۲

طول نقاط اکسترمم و نوع آن‌ها را در توابع زیر مشخص کنید.

الف)  $y = \frac{-x^2 + 4}{x^2} \Rightarrow y = -\frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$   
 $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 2$   
 $x < 2 : y' < 0 \Rightarrow$  کاهنده  
 $x > 2 : y' > 0 \Rightarrow$  رو به بالا  
 نقطه  $(2, 1)$  تابع  $\min$

ب)  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$   
 $y' = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$   
 $x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$   $\min$   
 $x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$   $\max$   
 $x = 0 \Rightarrow$  نقطه سرجانی

۳

تابع  $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$  را در نظر بگیرید.  
 الف) مجانب‌ها را مشخص کنید.  
 ب) به کمک رسم شکل مشخص کنید از کدام نواحی می‌گذرد؟

$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \Rightarrow y(x - 1) = 2x + 3 \Rightarrow yx - y = 2x + 3 \Rightarrow yx - 2x = y + 3 \Rightarrow x(y - 2) = y + 3 \Rightarrow x = \frac{y + 3}{y - 2}$   
 $\Rightarrow y = 2$  مجانب افقی  
 $\Rightarrow x = 1$  مجانب عمودی  
 $ad - bc = 2(-1) - 3(1) = -5 < 0$  (دست چپ)

از هر ناحیه می‌گذرد.

۴

نقطه‌ی  $(2, 3)$  مرکز تقارن  $y = \frac{ax + 4}{x - b}$  است.  
 الف)  $a$  و  $b$  را بیابید.  
 ب) ضابطه‌ی معکوس تابع را بیابید.

$(2, 3) \Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{2a + 4}{2 - b} \\ 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2 \\ 3 = \frac{2a + 4}{0} \Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$

جای عدد را عوض کن که معین باشی!

$y = \frac{3x + 4}{x - 2} \Rightarrow y(x - 2) = 3x + 4 \Rightarrow yx - 2y = 3x + 4 \Rightarrow yx - 3x = 2y + 4 \Rightarrow x(y - 3) = 2y + 4 \Rightarrow x = \frac{2y + 4}{y - 3}$   
 $\Rightarrow y = \frac{3x + 4}{x - 2} \Rightarrow y(x - 2) = 3x + 4 \Rightarrow yx - 2y = 3x + 4 \Rightarrow yx - 3x = 2y + 4 \Rightarrow x(y - 3) = 2y + 4 \Rightarrow x = \frac{2y + 4}{y - 3}$

۵

معادله‌ی محورهای تقارن  $y = \frac{3x+1}{x-2}$  را بیابید.

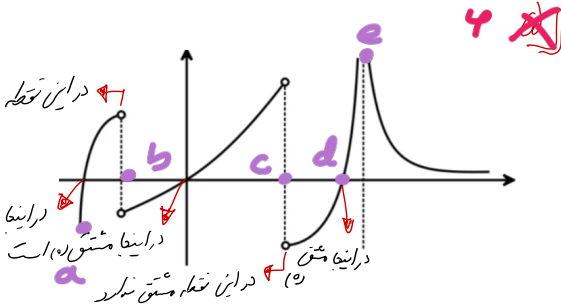
$$y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{مجاذب قائم } x=2 \\ \text{مجاذب افق } y=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مرکز تقارن } (2, 3)$$

فرمول  $y - y_0 = t(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = t(x - 2) \Rightarrow y - 3 = t(x - 2) \Rightarrow y - 3 = tx - 2t \Rightarrow y = tx - 2t + 3$

۶

اگر نمودار  $f'$  به صورت مقابل باشد، تابع بیوسته‌ی آن چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

$a, d \rightarrow f' = 0$   
 $b, c, d \rightarrow f' \neq 0$



1, 2, 5

۷

حدود  $a$  چه باشد تا نمودار تابع  $y = |x^2 - ax + 2|$  دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی باشد؟

$$y = |x^2 - ax + 2| \Rightarrow x^2 - (a-2)x + 2 > 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow a > 2\sqrt{2} \text{ or } a < -2\sqrt{2}$$

۸

$$\Rightarrow a \in \mathbb{R} - [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

۲

حاصل ضرب مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع  $y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2}$  را بیابید.

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2} \Rightarrow y'(x) = \frac{(x^2+2)(2x+2) - (x^2+x+2)(2x)}{(x^2+x+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (2x)(x^2+2) - (2x)(x^2+x+2) = 0 \Rightarrow 2x^3 + 4x - 2x^3 - 2x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow -2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

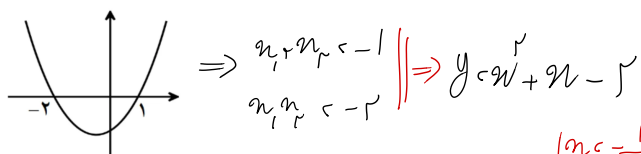
$$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{2+2}{2+\sqrt{2}+2} = \frac{4}{4+\sqrt{2}} = \frac{4(4-\sqrt{2})}{16-2} = \frac{16-4\sqrt{2}}{14} = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{2+2}{2-\sqrt{2}+2} = \frac{4}{4-\sqrt{2}} = \frac{4(4+\sqrt{2})}{16-2} = \frac{16+4\sqrt{2}}{14} = \frac{8+2\sqrt{2}}{7}$$

۲

۹

اگر نمودار  $y = x^2 + ax + b$  به شکل مقابل باشد، اختلاف طول‌های ماکسیمم نسبی تابع  $y = (x^2 + ax + b)^2$  و مینیمم نسبی تابع  $y = (x^2 + ax + b)^2$  را بیابید.



$$\Rightarrow y' = 2(x^2 + ax + b) \cdot (2x + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ max!} \\ x = -2 \text{ min} \\ x = 1 \text{ min} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = 2(x^2 + ax + b)^2 \cdot (2x + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ min!} \\ x = -2 \text{ فقط جزا} \\ x = 1 \text{ فقط جزا} \end{cases}$$

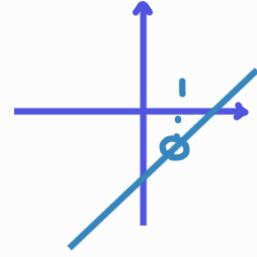
$$= \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

۱۰

$$\text{الف } y = \frac{-x^2 + 4x + 1}{x-1} \rightarrow y' = \frac{(-2x+4)(x-1) - (-x^2 + 4x + 1)}{(x-1)^2} \quad -3$$

$$y' = \frac{-x^2 + 4x - 5}{(x-1)^2} \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow \text{الکثر صم ندارد!}$$

$$\text{ب } y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = y = x-3, x \neq 1$$



الکثر صم ندارد!  
خفاست!