آفرینش ۱۹/۵

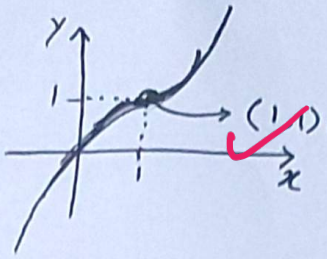
رادمهر نعمتی

۱) الف)

$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x-1)^3 + 1 \Rightarrow y' = 3(x-1)^2 \xrightarrow{y'=0} x=1, y=+1$

$\Rightarrow y'' = 6(x-1)$

		0		1	
y		−		+	+
y'	↘	0	↗	0	↗
y''	∩		∩		∪



نقطه عطف

۲)

الف) $y = \frac{-x^3+4}{x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f(x) = -x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -1 - \frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -1 - \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 3 \Rightarrow$ نقطه بحرانی: $(-1,3)$

$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\} = D_f$

ب) $y = \frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1,-1\} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$

$D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1,1\} = D_f$

$\Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right., B\left|\begin{matrix}\sqrt{3}\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right., C\left|\begin{matrix}-\sqrt{3}\\ \frac{-3\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right.$: نقاط بحرانی تابع

۳)

الف) $y = \frac{-x^2+4x+1}{x-1} \xrightarrow{+x-x} = \frac{3x+1}{x-1} - x = -x+3 + \frac{4}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\Rightarrow f'(x) = -1 - \frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = -4$ ∴ تابع نقطه بحرانی ندارد

$D_{f'} = D_f$

نقطه اکسترمم نیز ندارد

ب) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)} = x-3, D_f = \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow$ تابع کلیداً صعودی بوده

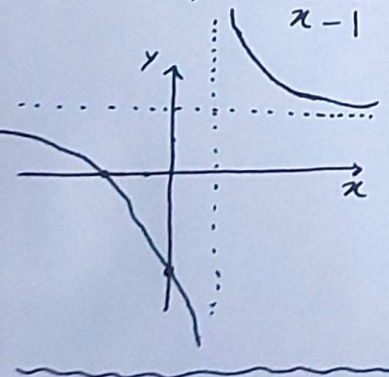
نقطه اکسترمم ندارد ⇐ تابع کلیداً صعودی بوده

۴)

الف) $y = \frac{2x+3}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2, D_f = \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow$

مجانب عمودی $x=1$

مجانب افقی $y=2$



ب) $\Rightarrow$ شکل از همه نواحی می‌گذرد

۵)

مرکز تقارن $(2,3) \Rightarrow$ مجانب‌ها: $x=2 : x-b=0 \Rightarrow x=b=2$

$y=3 : \lim_{x\to\infty} \frac{ax+4}{x-b} = a = 3$

$f(x) = \frac{ax+4}{x-b} = \frac{3x+4}{x-2} = y \Rightarrow 3x+4 = yx-2y \Rightarrow 2y+4 = x(y-3) \Rightarrow \frac{2y+4}{y-3} = x$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-3}$

۶)

$y=\frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow$ مجانب‌ها: $x=2$, $y=3$ ⟹ خط‌تان $\Rightarrow y=m(x-x_0)+y_0$ از مرکز تقارن گذشته و شیب $m=\pm 1$ دارد

$y=-(x-2)+3=-x+5$

$y=(x-2)+3=x+1$

۷) در نقاط بحرانی یا مشتق تعریف نشده یا $=0$ است براساس نمودار f' در ۳ نقطه تعریف نشده و در ۳ نقطه صفر است

پس تابع ۶ نقطه بحرانی دارد

۸) اگر $f(x)=x^2-9x+2$ بدون ریشه باشد تابع $y=|f(x)|$ تنها یک نقطه بحرانی دارد پس برای وجود ۳ نقطه بحرانی باید ۲ ریشه داشته باشد تا ۲ نقطه بحرانی در ریشه‌ها و یک نقطه دیگر در مختصات به طوری که رأس سهمی نداشته باشد

$\Delta<0 \Rightarrow a^2-8<0 \Rightarrow a\in(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

$\Delta>0 \rightarrow a^2>8$

دقت! ت اصلا ریشه ندارد

۹)

$y_{min}\times y_{max}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{-8}{-8}=\frac{8}{8}$

$yx^2+yx+2y=x^2+2 \Rightarrow (y-1)x^2+yx+2y-2=0$ ریشه مضاعف

$\Delta=0: y^2-4(y-1)(2y-2)=y^2-8(y^2-2y+1)=-7y^2+16y-8=0 \Rightarrow y_1\times y_2=\frac{-8}{-7}=\frac{8}{7}$

۱۰)

$(1,0),(-2,0) \Rightarrow y=(x-1)(x+2) \Rightarrow y=(x-1)^2(x+2)^2$

$y'=2(2x+1)(x-1)(x+2) \Rightarrow x=-\frac{1}{2},1,-2$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	1
y	0	$\frac{81}{16}$	0
		max نسبی	

$y=(f(x))^3 \Rightarrow y'=3f'(x)\times(f(x))^2$ ($f'(x)=2x+1$)

x	-2	$-\frac{1}{2}$	1
y'	$-$ ↘	$-$ ↘	$+$ ↗ $+$ ↗
		مینی نسبی	

$y=(f(x))^3 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$, $\Delta x=0$

۸ $y=|f(x)|$ زمانی دارای ۳ نقطه‌ی بحرانی است که نمودار f محور xها را در دو نقطه قطع کرده باشد. پس x^2-ax+2 باید ۲ ریشه داشته باشد

$\Delta>0 \rightarrow a^2-8>0 \rightarrow a^2>8 \rightarrow a>2\sqrt{2}$ یا $a<-\sqrt{2}$