ماهان نژادکرد

تکلیف ۲۵

۱۲ بیس B

آزمون ۱۹٫۷۵

۱ـ

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{1-\frac{a}{3}-1+\frac{a}{1}}{2} = \frac{a}{3}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{a}{x^2} \Rightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

۱٫۷۵

$x=-\sqrt{3}$ در بازه‌ی $[1 و 3]$ نیست پس $x=\sqrt{3}$

۲ـ معادله تلاقی تابع باید ریشه مضاعف داشته باشد

$$2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$$
$x<0$ و $x<0$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 36 - 4(2a)(18a) = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

$$x<0 \Rightarrow \frac{6}{4a} < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

۲

۳ـ

$$y = x^3 - 12x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x		-2		$+2$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

نسبی max، نسبی min

$$\Rightarrow y = 8 - 24 + 2 = \boxed{-14}$$

۲

۴ـ

$$y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax - 2b$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \\ x = -2 \Rightarrow 12 - 4a - 2b = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3} \end{cases}$$

$b=0$

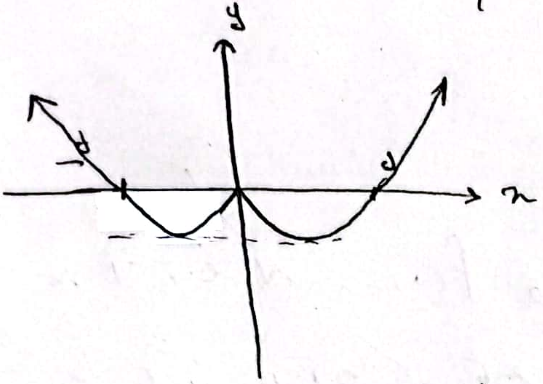
$$\Rightarrow f(0) = 0 + 0 + 0 - 4 = -4$$
$$\Rightarrow f(-2) = -8 + 12 - 4 = 0$$

فاصله $(0,-4)$ و $(-2,0)$ $= \sqrt{(-4-0)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

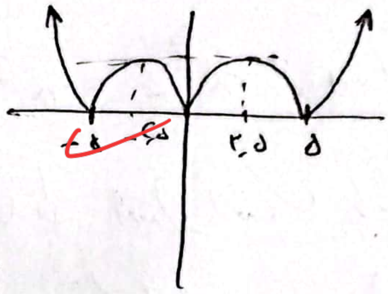
۲

۵- حل با رسم شکل:

$$f(x) = x^2 - 5|x| = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 0 \\ x^2 + 5x & x < 0 \end{cases}$$



$\xrightarrow{|f(x)|}$



$\Rightarrow$ نسبی $max = \{-۲/۵, ۲/۵\} \rightarrow m = ۲ \quad \Big| \quad \frac{n}{m} = ۱/۵$ (۲)

نسبی $min = \{-۵, ۰, ۵\} \Rightarrow n = ۳$

۶-

$$f(x) = x(|x| + ۳) = \begin{cases} x^2 + ۳x & x \geq ۰ \\ -x^2 + ۳x & x < ۰ \end{cases}$$

-۳ ۰

$x^2+۳x$ | غ ق | غ ق

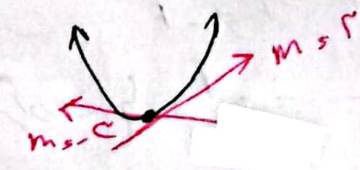
$$\Rightarrow |f(x)| = \begin{cases} |x^2 + ۳x| & x \geq ۰ \\ |-x^2 + ۳x| & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + ۳x & x \geq ۰ \\ x^2 - ۳x & x < ۰ \end{cases}$$

۰ ۳

$+x^2-۳x$ | غ ق | غ ق

مشتق $\Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۳ & x \geq ۰ \rightarrow ۲x + ۳ = ۰ \rightarrow x = -۱/۵ \text{ غ ق ق} \\ ۲x - ۳ & x < ۰ \rightarrow ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۱/۵ \text{ غ ق ق} \end{cases}$

$$x = ۰ \rightarrow \begin{cases} f'_+(۰) = ۳ \\ f'_-(۰) = -۳ \end{cases} \Rightarrow$$



x		۰	
y'	-		+
y	↘		↗

(۲)

تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد $(x = ۰)$

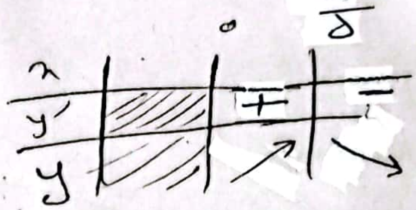
$f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,|x-a| \to f(x)=-\sqrt[3]{x^2}(x-a)$ -۷

$0<x<a$

$\to a>0$

$\to f(x)=-x^{\frac{5}{3}}+ax^{\frac{2}{3}} \to f'(x)=-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}ax^{-\frac{1}{3}}$

$\to f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}a\right) \to$



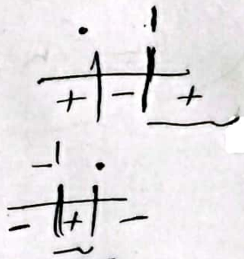
۲

پس نقطه max تابع مورد نظر ما همان $x=\frac{2a}{5}$ است

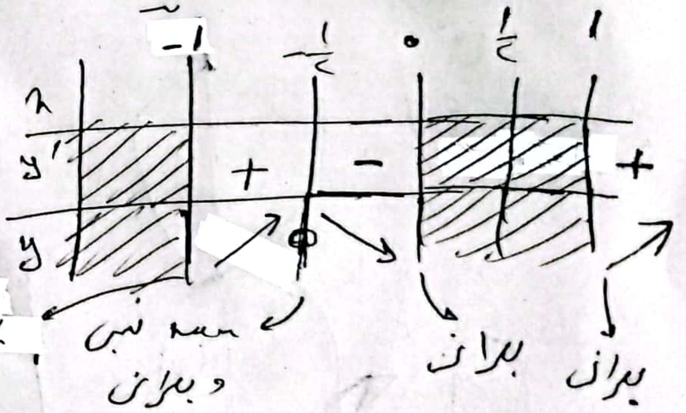
$x=\frac{2a}{5}$

$\to \sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}} \times \frac{3a}{5}=12 \to a=\frac{5}{2}, 5$

$f(x)=\sqrt{x|x|-x}=\begin{cases}\sqrt{x^2-x} & x\geq 0\\ \sqrt{-x^2-x} & x<0\end{cases}$ -۸



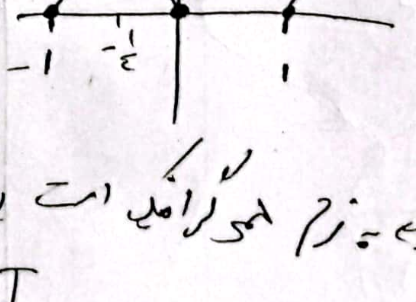
$\to f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & x\geq 0\\ \dfrac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}} & x<0\end{cases}$



$m=1,\ n=0,\ k=2$

۲

$\to \frac{km+n}{k-n}=\frac{2+0}{2-0}=1$



شکل

۹- تابع باید نزولی اکید است پس در هر دو شاخه (ص و ۱) نزولی باید:

$f'(x)<0 \qquad 1-m\leq 1 \to m\geq 0 \Big]\ \mathrm{I}$

(شیب خط (ضریب x))

۲

$f'(x)=\frac{m^2-m-2}{(x+m-1)^2}<0 \Rightarrow m^2-m-2<0 \to$ $\begin{array}{c|c|c|c} & -1 & & 2 \\ + & & - & + \end{array}$ $-1<m<2 \Big]\ \mathrm{II}$

$\mathrm{I}\cap\mathrm{II} \to m=0$ یا 1

$$f(x) = \frac{x}{1-x|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$$ -۱

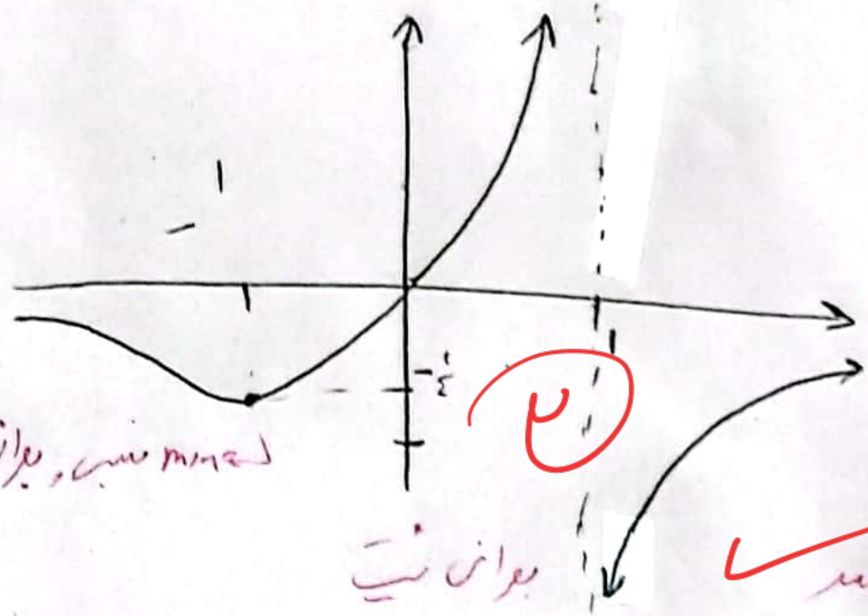
ریشه مخرج ؟ ۱

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x^2)+2x(x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x \geq 0 \to x = \pm 1 \\[2ex] \dfrac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \qquad x = \pm 1 \end{cases}$$

مشتق ۱

ریشه صورت مشتق

x		-1		0		$+1$	
y'	$-$		$+$		$+$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
		0			$+\infty$		$-\infty$



مینیمم نسبی بازه

۲

بحرانی نیست

یک نقطه بحرانی داریم

$x = -1$