

اگر تابع مشتق پذیر، $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ و $g'(x) = f(\tan x + \sqrt{2} \cos x)$ باشد، مقدار $f'(2)$ را بیابید.

$$g'(u) = (1 + \tan u) f'(\tan u + \sqrt{2} \cos u)$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1 + \tan \frac{\pi}{4}) f'\left(\tan \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}\right) = 2 f'(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر $f(x) = \frac{\lambda + \cos x}{4 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ را بیابید.

$$f'(u) = \frac{\lambda + \cos u}{4 - \cos^2 u} = \frac{(\lambda + \cos u)(-2 \cos u \sin u)}{(4 - \cos^2 u)^2} = \frac{-2 \cos u \sin u (\lambda + \cos u)}{(4 - \cos^2 u)^2}$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} (\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})}{(4 - \frac{1}{2})^2} = \frac{-\sqrt{2} (\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})}{(\frac{7}{2})^2} = \frac{-2\sqrt{2} (\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})}{49}$$

$$g'(u) = \frac{2}{(2 - \cos u)^2} \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{2}{(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-2\sqrt{2} (\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2})}{49} - \frac{4}{(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

به ازای کدام مقدار a اختلاف شیب نیم خطهای مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3| \sqrt{ax}$ در نقطه‌ای $x = \frac{2}{\sqrt{a}}$ برابر $2\sqrt{a}$ می‌شود؟

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 \sqrt{ax} \\ 3 - 4x \sqrt{ax} \end{cases} \Rightarrow f'_+(x) = 4 - 2\sqrt{a} \sqrt{x} \quad f'_-(x) = -4 - 2\sqrt{a} \sqrt{x}$$

$$f'_+\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) - f'_-\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right) = 8 - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

خط $y + ax = 2$ در نقطه‌ای به طول 4 بر نمودار تابع $f(x) + f'(x) = -1$ مماس است. اگر $f(4) + f'(4)$ باشد، مقدار $f'(4)$ را بیابید.

$$y + ay' = f(x) + f'(x) = -1 \Rightarrow -4a + 2 - a = -4a + 2 - 1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow y' = f'(x) = -a \Rightarrow f'(4) = -1$$

خط $5x - y = 5$ در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی $y = \frac{ax - 1}{3x + 1}$ مماس است. مقدار a را بیابید.

$$y = \frac{ax - 1}{3x + 1} \Rightarrow y' = \frac{a(3x + 1) - (ax - 1) \cdot 3}{(3x + 1)^2} = \frac{a + 3}{(3x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{a + 3}{(3x + 1)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a + 3}{(3x + 1)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow (3x + 1)^2 = 5(a + 3)$$

$$3x + 1 = \sqrt{5(a + 3)} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5(a + 3)} - 1}{3}$$

$$y = \frac{a(\frac{\sqrt{5(a + 3)} - 1}{3}) - 1}{3(\frac{\sqrt{5(a + 3)} - 1}{3}) + 1} = \frac{a(\sqrt{5(a + 3)} - 1) - 3}{\sqrt{5(a + 3)} - 1 + 3} = \frac{a\sqrt{5(a + 3)} - a - 3}{\sqrt{5(a + 3)} + 2}$$

