

۲. امتحان

اگر تابع مشتق پذیر،  $g(x) = f(\tan x + \sqrt{2} \cos x)$  و  $g'(x) = \sqrt{2}$  باشد، مقدار  $f'(2)$  را بیابید.

$$g'(x) = f'(\tan x + \sqrt{2} \cos x) \cdot (1 + \tan' x) = f'(\tan x + \sqrt{2} \cos x) \cdot \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \sqrt{2} \cdot f'(2) = \sqrt{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

۱

اگر  $f(x) = \frac{\lambda + \cos x}{4 - \cos^2 x}$  و  $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$  باشد، حاصل عبارت  $f'(\frac{\sqrt{2}}{2}) - 2g'(\frac{\sqrt{2}}{2})$  را بیابید.

$$f(x) = \frac{\lambda + \cos x}{4 - \cos^2 x} = \frac{\lambda + \cos x}{(2 - \cos x)(2 + \cos x)}$$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(4 - \cos^2 x) - (\lambda + \cos x)(-2 \cos x \sin x)}{(4 - \cos^2 x)^2}$$

$$f'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{(-\frac{1}{\sqrt{2}})(4 - \frac{1}{2}) - (\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}})(-\sqrt{2})}{(4 - \frac{1}{2})^2}$$

$$2g'(x) = 2 \cdot \frac{\sin x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \sin x}{(2 - \cos x)^2}$$

$$2g'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{(2 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{(2 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{\sqrt{2}}{2}) - 2g'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۲

به ازای کدام مقدار  $a$  اختلاف شیب نیم خطهای مماس چپ و راست بر منحنی تابع  $f(x) = |4x - 3| \sqrt{ax}$  در نقطه  $x = \frac{2}{\sqrt{a}}$  برابر  $2\sqrt{a}$  می شود؟

$$f(x) = |4x - 3| \sqrt{ax}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4\sqrt{ax} - \frac{3}{2}\sqrt{a} & \text{for } x > \frac{3}{4} \\ -4\sqrt{ax} - \frac{3}{2}\sqrt{a} & \text{for } x < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f'(\frac{2}{\sqrt{a}}) = 4\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{a}$$

$$f'(\frac{2}{\sqrt{a}}) = -4\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{a} = -4\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{a} \Rightarrow 8\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \text{No solution}$$

۳

خط  $y + ax = 2$  در نقطه ای به طول ۴ بر نمودار تابع  $f(x) = f'(x) = -1$  مماس است. اگر  $f(x) + f'(x) = -1$  باشد، مقدار  $f'(4)$  را بیابید.

$$y = -ax + 2 \Rightarrow y' = -a$$

$$f(x) + f'(x) = -1 \Rightarrow f(x) = -f'(x) - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(-a) - 1 = a - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = -a$$

$$\Rightarrow f'(4) = -a = -\frac{2}{3}$$

۴

خط  $xy - x = 5$  در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی  $y' = \frac{ax - 1}{3x + 1}$  مماس است. مقدار  $a$  را بیابید.

$$xy - x = 5 \Rightarrow y = \frac{x+5}{x} = 1 + \frac{5}{x}$$

$$y' = \frac{0 \cdot x - (x+5)}{x^2} = -\frac{x+5}{x^2}$$

$$y' = \frac{ax - 1}{3x + 1}$$

$$-\frac{x+5}{x^2} = \frac{ax - 1}{3x + 1}$$

$$\Rightarrow -x(3x+1) = x^2(ax-1)$$

$$\Rightarrow -3x^2 - x = ax^3 - x^2$$

$$\Rightarrow ax^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x(ax^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1^2} = 1$$

۵

