به نام خدا
ماهان نژادگر

دوازدهم پسر B

تکلیف ۱۸

۱-

الف) $\lim_{x\to 2^+} \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(2)+5}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

ب) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(2)+5}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

ج) $\lim_{x\to 2} \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2\times2+5}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

د) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+7}{[x^2]} = \frac{7}{[0^+]} = \frac{7}{0} = $?! تعریف نشده است

زیرا در مخرج ۰ دقیق است

۲-

الف) $\lim_{x\to 3^-} 4[x]-2 = 4(2)-2 = 6$

$2\le x<3 \Rightarrow [x]=2$

ب) $\lim_{x\to 3^-} [4x-2] = [12^- -2] = [10^-] = 9$

$x<3 \Rightarrow 4x<12 \Rightarrow 4x-2<10 \Rightarrow [4x-2]=9$

ج) $[\lim_{x\to 3} 4x-2] = [4(3)-2] = [10] = 10$

د) $[\lim_{x\to 3^+} 4x-2] = [4(3)-2] = [10] = 10$

جواب حد به صورت دقیق اعلام می‌شود

۳-

الف) $\lim \frac{3[x]+1}{2} = \frac{3\times2+1}{2} = \frac{7}{2}$

$x<3 \Rightarrow [x]=2$

ب) $\lim [\frac{3x+1}{2}] = [\frac{10^-}{2}] = [5^-] = 4$

$x<3 \Rightarrow 3x<9 \Rightarrow 3x+1<10 \Rightarrow \frac{3x+1}{2}<5$

$\Rightarrow [\frac{3x+1}{2}] = 4$

ج) $[\lim_{x\to 3^-} \frac{3x+1}{2}] = [\frac{3(3)+1}{2}] = [5] = 5$

د) $[\lim_{x\to 3^+} \frac{3x+1}{2}] = [\frac{3(3)+1}{2}] = [5] = 5$

۴_

الف) $\lim_{x\to 1} \frac{x-5}{x^2-6x+5} = \frac{-4}{0}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{-4}{0^+} = -\infty$

حد ندارد

$x^2-6x+5:$

	1		5	
+		−		+

ب) $\lim_{x\to 3} \frac{x-4}{x^2-6x+9} = \frac{x-4}{(x-3)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

حد ندارد

	3	
+		+

البته باید عبارت مخرج را تعیین علامت کرد و در دو شاخه بررسی کرد

۵_

الف) $\lim_{x\to -3} [-3x]-[5x] = [9]-[-15] = !?$

$\lim_{x\to -3^-} [-3x]-[5x] = 9+16 = 25$

$x<-3 \Rightarrow \begin{cases} -3x>9 \Rightarrow [-3x]=9 \\ 5x<-15 \Rightarrow [5x]=-16 \end{cases}$

حد ندارد

$\lim_{x\to -3^+} [-3x]-[5x] = 8+15 = 23$

$x>-3 \Rightarrow \begin{cases} -3x<9 \Rightarrow [-3x]=8 \\ 5x>-15 \Rightarrow [5x]=-15 \end{cases}$

ب) $\lim_{x\to (-\frac{1}{4})^-} [\frac{-1}{x^2}] = -16$

$x<-\frac{1}{4} \Rightarrow x^2>\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{x^2}<16 \Rightarrow \frac{-1}{x^2}>-16 \Rightarrow [-\frac{1}{x^2}] = -16$

$x\to(-\frac{1}{4})^-$

۶_

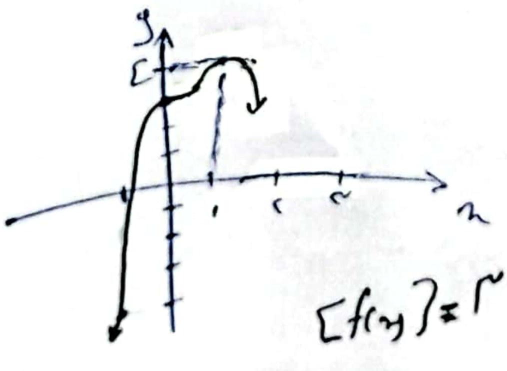
الف) $\lim_{x\to 1} [\overbrace{4x^3-3x^4+2}^{f(x)}] = \underline{2}$

$f(x) = -3x^4+4x^3+2$

$\Rightarrow f'(x) = -12x^3+12x^2 = x^2(-12x+12)$

	0		1	
+		+		−

$f(0)=2 \quad f(1)=3$



با توجه به شکل در نقطه ۱، ماکزیمم نسبی داریم پس $[f(x)]=2$

ب) $\lim_{x\to 0}[4x^3-3x^2+3]=[3]$

$\lim_{x\to 0^+}[4x^3-3x^2+3]=[3^-]=2$

$\lim_{x\to 0^-}[4x^3-3x^2+3]=[3^-]=2$

حد دارد

-۷

الف) $\lim_{x\to 2}\frac{|x^3-8|}{x^2-4}$ حد ندارد

$$\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3\\ \lim_{x\to 2^-}=\frac{-(x^3-8)}{x^2-4}=\frac{-(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-x^2-2x-4}{x+2}=-3\end{cases}$$

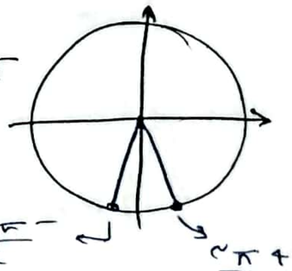
ب) $\lim_{x\to\pi}\frac{|\sin x|}{\sin 2x}$ حد ندارد

$$\begin{cases}\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin x}{\sin 2x}=\frac{-\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{-1}{2\cos x}=\frac{-1}{2\times(-1)}=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2\cos x}=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

-۸

الف) $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\sqrt{\cos x}$ حد ندارد

$$\begin{cases}\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^+}\sqrt{\cos x}=\sqrt{0^+}=0\\ \lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\sqrt{\cos x}=\sqrt{0^-}\longrightarrow \text{تعریف نشده}\end{cases}$$



الف) شکل به صورت غیرواقعی رسم شده است.

ب) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x-2\sqrt{x}}$ حد ندارد

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x-2\sqrt{0^-}}\longrightarrow \text{تعریف نشده}\\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x-2\sqrt{x}}=\sqrt{\underbrace{\sqrt{x}}_{+}\underbrace{(\sqrt{x}-2)}_{-}}\end{cases}$$

زیر رادیکال ← منفی است و تعریف نمی‌شود

$\begin{array}{c|c|c} & 0 & 4 & \\ + & - & + \end{array}$

-۹

الف) $\lim_{x\to 0^+}\frac{(-1)^{[\sin x]}}{x^3-x^2}=\frac{(-1)^0}{x^2(x-1)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

x^3-x^2: $\begin{array}{c|c|c} & 0 & 1 & \\ - & - & + \end{array}$

ه) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-[x^2]}{x-[x]}$ حد ندارد

$$\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-[x^2]}{x-[x]}=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2=4\\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-[x^2]}{x-[x]}=\frac{x^2-3}{x-1}=\frac{1}{1}=1\end{cases}$$

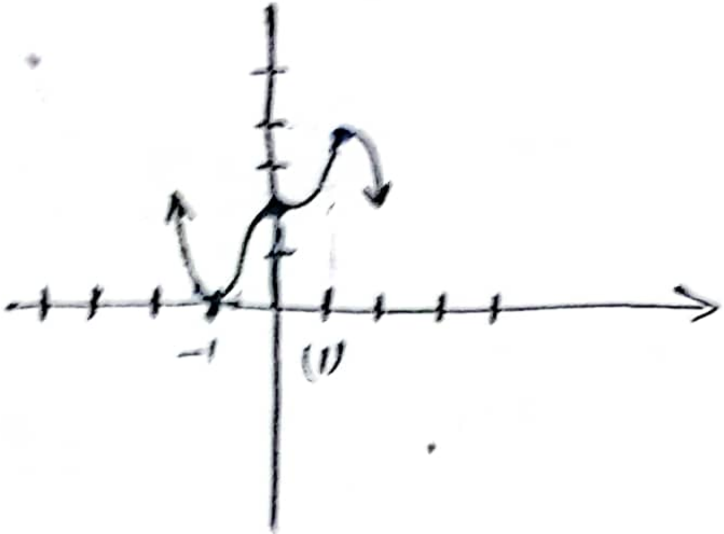
-۱۰

الف) $y=5x^3-3x^5+2$

$\Rightarrow y'=-15x^4+15x^2=15x^2(-x^2+1)$

$\begin{array}{c|c|c|c} & -1 & 0 & 1 & \\ - & + & + & - \\ \searrow & \nearrow & \nearrow & \searrow \end{array}$

$y=0$ $\quad y=2$ $\quad y=4$



ت) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$