۱۷٫۵ شما اصولا تیپ های خوبی می‌نویسید!

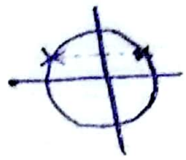
با دقت بیشتر سوالات را حل کنید!

«مهدی ابراهیمیان» «تکلیف ۱۴»

(۱)

الف) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 3\sin x - 1 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Big\langle \begin{matrix} \frac{1}{2} \checkmark \\ -2 \times \end{matrix} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$



$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ یا $2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

(۲)

ب) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

$\Rightarrow \cos x = \Big\langle \begin{matrix} 1 \checkmark \\ -\frac{3}{2} \times \end{matrix} \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

---

(۲)

الف) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x = 2\cos 2x \sin 2x$

$\Rightarrow \sin 2x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases}$

(۲)

ب) $\underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cos 2x} + \underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x} = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + \underbrace{2\cos 2x \sin 2x}_{\sin 4x} = 0$

$\Rightarrow \sin 4x = -1 \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

---

(۳) ۱٫۷۵

الف) $\xrightarrow{\times \sin x} \cos x (2\cos x + 1) = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x = \Big\langle \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi \\ x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$

ب) $\sin^2 x - \sin x \cos x + 1 = 2 \xrightarrow{\div \cos^2 x} 2\tan^2 x - \tan x + 1 = \frac{2}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow 2\tan^2 x - \tan x + 1 = 2 + 2\tan^2 x \Rightarrow \tan x = -1$

$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

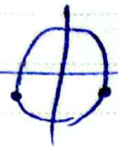
اگر $\cos x = -1$ باشد $\sin x = 0$ است و عبارت تعریف نشده می‌شود

پس جواب غیرقابل قبول محسوب می‌شود

۴ (۱٫۵)

الف) $\Rightarrow -\sin(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\sin(2x-\frac{\pi}{2})}{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$

۰٫۷۵

$\Rightarrow$  $\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \begin{cases} k\pi \pm \frac{\pi}{6} \\ k\pi + \frac{4\pi}{6} \end{cases}$

$2x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$

$2x = 2k\pi + \frac{10\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{6}$

ب) $\cos(2x - \frac{\pi}{9}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{9} = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + 2x)$

۰٫۱۲۵

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{7\pi}{18}$ (۷۲)

۵

$\frac{\sin 2x \cos 2x + \sin 2x}{\sin 2x} = \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{\sin 2x(\cos 2x + 1)}{\sin 2x} = 1$ (۲)

$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۶

$\frac{x}{2} = \alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha$

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 + 2\cos\alpha \Rightarrow \underbrace{-\cos 2\alpha}_{-(2\cos^2\alpha - 1)} = 1 + 2\cos\alpha$ (۱٫۵)

$\Rightarrow -2\cos^2\alpha + 1 = 1 + 2\cos\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -1 , 0$

$\frac{x}{2} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 4k\pi + 2\pi$

$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

صورت سوال را بادقت بخوان!

اختلاف جواب ها در بازه ی $[-\pi , \frac{3\pi}{2}]$ ؟

۷) $\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x} = \sin^2 x \cos^3 x \Rightarrow$ $(x = k\pi)$

$\to -\cos^3 x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi$ ۱٫۵

$\Rightarrow x = \dfrac{2k\pi + \pi}{3}$

تعداد جواب ها در بازه ی $[0, 2\pi]$ ؟

---

۸) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x$

$\Rightarrow 3x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{4} + \dfrac{\pi}{16}$ ۲

---

۹) راه ۲: $1 + \sin 2x = 2\cos^2 2x \Rightarrow 1 + \sin 2x = 2(1 - \sin^2 2x)$ ۱٫۲۵

$\Rightarrow 2 - 2\sin^2 2x - 1 - \sin 2x = 0 \xrightarrow{\sin 2x = t} -2t^2 + t + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}$
$2x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6}$
$2x = 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6}$
$\Rightarrow x = \begin{cases} k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \\ k\pi - \dfrac{\pi}{12} \\ k\pi + \dfrac{7\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{12}, \dfrac{7\pi}{12}$

۳ جواب

---

۱۰) الف) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi$

$x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ ۲

ب) نقاط مرزی را مورد بررسی قرار می دهیم $\Rightarrow x = 0, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$

Scanned with CamScanner

سوال ۴ قسمت الف)

$\cos(-x)=\cos x$

$$\cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2} \;=\; \cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{if } \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha=\sin\beta \rightarrow \cos(\frac{\pi}{4}+x)\sin(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+2x)=\frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}}$$

سوال ۴ قسمت ب

$$\cos(2x-\frac{\pi}{9})=-\sin 2x$$

$$\cos(2x-\frac{\pi}{9})=\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

$$2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}+2x)$$

حالت (+) $\rightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{2}=0$ ×

حالت (−) $\rightarrow 2x-\frac{\pi}{9}=2k\pi-\frac{\pi}{2}-2x$

$$4x=2k\pi-\frac{7\pi}{18} \rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{72}}$$

سوال ۶

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{4}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}+\cot\frac{x}{2}=\frac{1+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{x}{4}}=\cot\frac{x}{4}$$

$$\tan\frac{x}{4}=\cot\frac{x}{4} \rightarrow \tan\frac{x}{4}=\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})$$

$$\frac{x}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4} \rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x=2k\pi+\pi$$

جوابها: $k=0 \rightarrow x=\pi$

$k=-1 \rightarrow x=-\pi \rightarrow$ اختلاف $=|\pi-(-\pi)|=2\pi$

سوال ۷

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \xrightarrow{\cos^2 x = 1-\sin^2 x}$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \longrightarrow \sin^2 x(1+\cos 3x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 3x = -1 \end{cases}$$

$$\sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi \longrightarrow x = 0 \ (3),\ \pi \ (2),\ 2\pi \ (1)$$

$$\cos 3x = -1 \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \ (5),\ \pi,\ \frac{5\pi}{3} \ (4)$$

معادله ۵ جواب دارد

سوال ۹

$$\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 2x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1+\sin 2x = 2\cos^2 2x$$

$$1+\sin 2x = 2 - 2\sin^2 2x \rightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin 2x = -1 \rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k=1]{0 \le x \le \pi} x = \frac{3\pi}{4} \ ✓$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ \text{یا}\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow[k=0]{0 \le x \le \pi} x = \frac{\pi}{12} \ ✓ \ \text{یا}\ \frac{5\pi}{12} \ ✗$$

چون عبارت به توان ۲ رسیده است جواب زائد تولید می‌کند

به ازای $x = \frac{5\pi}{12}$، $\cos 2x$ منفی می‌شود، چون جواب رادیکال است نمی‌تواند

* معادله ۲ جواب دارد