☺ آفرین ۱۴/۵

نام و نام خانوادگی ......[illegible]...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۵.. کلاس ......[illegible]......

۱ — ۲

$2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$\frac{2x+1}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

۲ — ۲

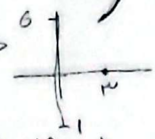
الف) $x^2 - 2x + 3 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$

$\Rightarrow (x-1)^2 + 2$

$\Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{y-2} + 1 = x$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [2, +\infty)$

ب) $x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$



$\Rightarrow (x-1)^2 + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$

$\Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [6, +\infty)$

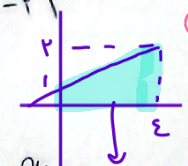
$R_{f^{-1}} = D_f = [3, +\infty)$

۳ — ۱/۵

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} \Rightarrow 2x - \sqrt{4x^2 - 16x + 16} = 2x - 2|x-2|$

$2x - 2|x-2| \begin{cases} 2x - 2x + 4 & x \geq 2 \\ 2x + 2x - 4 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow 4 ; x \geq 2 \Rightarrow f(x) = 4x - 4$

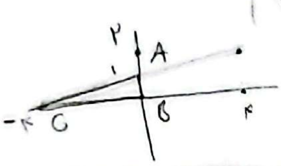
$\boxed{4x - 4 ; x < 2}$



$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + 1$

$R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 2)$

$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4)$ +۴



$S_{ABC} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$

$S = \frac{4(1+2)}{2} = 6$

۴ — ۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5} \Rightarrow x_1^2x_2^2 - 5x_1^2 = x_1^2x_2^2 - 5x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

از آنجایی که اگر $x_1 = -x_2$ باشد آنگاه آنها مختلف العلامت می‌شوند $x_1 = -x_2$ جواب نمی‌باشد و تنها $\boxed{x_1 = x_2}$ جواب است پس تابع یک به یک است

$x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-5} \Rightarrow y^2 = \frac{5x^2}{x^2-1} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}}$

۵ — ۲

$g(x) \begin{cases} x^2 - 4x + k & ; x \geq 2 \\ x^2 + 4x + 3k & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f(2) = 4 - 8 + k = k - 4 \\ f(2) = -4 + 12 + 3k = 3k + 8 \end{matrix}$

$\Rightarrow 3k + 8 \leq k - 4 \Rightarrow 2k \leq -12 \Rightarrow \boxed{k \leq -6}$

$f(x)=۳x+|x| \Rightarrow \begin{cases} ۳x+x & x\geq ۰ \\ ۳x-x & x<۰ \end{cases} \Rightarrow ۴x=y \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x}{۴} & x\geq ۰ \\ \frac{x}{۲} & x<۰ \end{cases}$

$\Rightarrow g(x)=ax+b|x|=\begin{cases} \frac{۲x}{۸} ; & x\geq ۰ \\ \frac{۴x}{۸} ; & x<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳x}{۸}-\frac{x}{۸} \\ \frac{۳x}{۸}+\frac{x}{۸} \end{cases} \Rightarrow \frac{۳}{۸}(x)-\frac{۱}{۸}|x|$ ۶

$\Rightarrow a=\frac{۳}{۸} , b=\frac{-۱}{۸} \Longrightarrow ab=-\frac{۳}{۶۴}$

۳

$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+m} \Rightarrow \left|\begin{matrix} ۲ \\ -۱۰ \end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{۶+۴}{۲+m}=-۱۰ \Rightarrow \boxed{m=-۳} \Rightarrow f(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳} \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow fof^{-1}(x)+f(x)$ ۷

$x+\frac{۳x+۴}{x-۳}=x \Rightarrow \frac{۳x+۴}{x-۳}=۰ \Rightarrow ۳x+۴=۰ \Rightarrow \boxed{x=-\frac{۴}{۳}}$

۲

$f(۳-۲x)=۲-g(\frac{x}{۲})$

$f^{-1}(-۲)+۴g^{-1}(۴) \Rightarrow f(۳-۲x)=-۲ \Rightarrow ۲-g(\frac{x}{۲})=-۲ \Rightarrow g(\frac{x}{۲})=۴$

$\Rightarrow g^{-1}(۴)=\frac{x}{۲} \; , \; f^{-1}(-۲)=۳-۲x$ ۸

$\Rightarrow ۳-۲x+۲x=۳$

۲

$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \Rightarrow y=-\frac{-۵x-۱۳}{۱+x} \Rightarrow y=\frac{۵x+۱۳}{۱+x} \Rightarrow \frac{۵(x-۲)+۱۳}{x-۲+۱}-۳$

$\Rightarrow \frac{۵x+۳}{x-۱}-۳ \Rightarrow \frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱}=\frac{۲x+۶}{x-۱} \Rightarrow f(x)=\frac{۲x+۶}{x-۱} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۶}{x-۲}$

۳

$\Rightarrow \frac{x+۶}{x-۲}=\frac{۲x+۶}{x-۱} \Rightarrow x^۲+۶x-x-۶=۲x^۲+۶x-۴x-۱۲ \Rightarrow x^۲-۳x-۶ \Rightarrow S=۳$

$f(x)=x+۴[x] \quad g(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow x=۴[y]+y \Rightarrow [x]=۵[y] \Rightarrow [y]=\frac{[x]}{۵}$

$f-g(x) \Rightarrow f-f^{-1}(x) \Rightarrow y=x-۴[y] \Rightarrow y=x-\frac{۴[x]}{۵}$

$\Rightarrow x+۴[x]-x+\frac{۴[x]}{۵} \Rightarrow \boxed{\frac{۲۴[x]}{۵}}$

۲