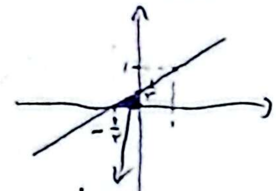
نام و نام خانوادگی ...[illegible]... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..۱۰.. کلاس ...دوازدهم تجربی B...

۱

$f(x) = \frac{3x-1}{2} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3} \longrightarrow$



$S = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{12}$

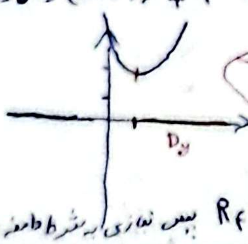
۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty)$

$f(x) = y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow \sqrt{y-2} + 1 = x = f^{-1}(x)$

$\sqrt{x-2} + 1 = y = f^{-1}(x)$

یک به یک است

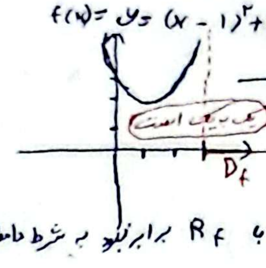


نیازی به شرط دامنه ندارد

$R_f = [2, +\infty)$ و $D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$ پس نیازی به شرط دامنه ندارد

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$

$f(x) = y = (x-1)^2 + 2 \longrightarrow R_f = [6, +\infty)$



یک به یک است

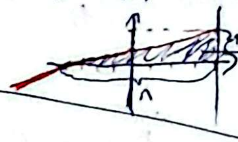
$\sqrt{x-2} + 1 = y = f^{-1}(x) \quad x \in [6, +\infty)$

چون $D_{f^{-1}}$ با R_f برابر نبود به شرط دامنه نیاز داشت

۳

$f(x) = 2x - \sqrt{16 - 4x(4-x)} \Rightarrow f(x) = 2x - \sqrt{16 - 16x + 4x^2} \Rightarrow f(x) = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} \rightarrow$

$\rightarrow 2x - |2x-4| = f(x)$



$S = \frac{2 \times 8}{2} = 8$

$f(x) \begin{cases} 4 & x \in [2, +\infty) \quad \text{وارون ناپذیر} \\ 4x - 4 & x \in (-\infty, 2) \quad \text{وارون پذیر} \end{cases}$

$\longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4} \quad x \in (-\infty, 4) \cup \{4\}$

۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-5}} \xrightarrow{\text{هم علامت هستند}} \frac{x_1^2}{x_1^2-5} = \frac{x_2^2}{x_2^2-5}$

$\rightarrow \cancel{x_1^2 x_2^2} - 5x_1^2 = \cancel{x_2^2 x_1^2} - 5x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \longrightarrow x_1 = \pm x_2$

ق ق چون هم علامتند

یک به یک است

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2-5}} \rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-5} \rightarrow x^2y^2 - 5x^2 = y^2 \rightarrow y^2(x^2-1) = 5x^2 \rightarrow y^2 = \frac{5x^2}{x^2-1}$

$y = \sqrt{\frac{5x^2}{x^2-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$

۵

$g(x) \begin{cases} x^2 - 4x + k & x \geq 2 \quad \text{یک به یک و اکیداً صعودی} \\ -x^2 + 6x + 3k & x < 2 \quad \text{یک به یک و اکیداً صعودی} \end{cases}$

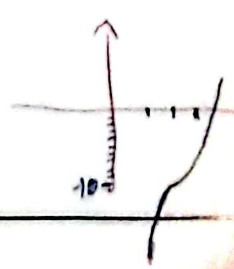
$x = 2$

$\cancel{4} - 8 + k \geq -4 + 12 + 3k$

$-4 + k \geq 8 + 3k$

$-12 \geq 2k$

$-6 \geq k$



۶

$$f(x)=۳x+|x| \rightarrow f(x)\begin{cases} ۴x & x\geq ۰ \\ ۲x & x<۰ \end{cases} \rightarrow f^{-1}(x)\begin{cases} \frac{x}{۴} & x\geq ۰ \\ \frac{x}{۲} & x<۰ \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=ax+b|x| \rightarrow f^{-1}(x)=\underbrace{\frac{۳}{۸}}_{a}x-\underbrace{\frac{۱}{۸}}_{b}|x| \rightarrow ab=\frac{۳}{۸}\cdot\frac{-۱}{۸}=\frac{-۳}{۶۴}=ab$$

۷

$$f(x)=\frac{۳x+۴}{x+m} \xrightarrow{(۲,۱۰)} \frac{۳\times۲+۴}{۲+m}=-۱۰ \rightarrow m=-۳ \rightarrow f(x)=\frac{۳x+۴}{x-۳}$$

مجانب افقی $=۳$

مجانب قائم $=۳$

در نتیجه تابع $f^{-1}(x)=f(x)$

$$y=\underbrace{f\circ f^{-1}(x)}_{x}+f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{تقاطع با نیمساز اول و سوم}} \cancel{x}=\cancel{x}+\frac{۳x+۴}{x-۳} \rightarrow ۰=\frac{۳x+۴}{x-۳}$$

$$\rightarrow x=-\frac{۴}{۳}$$

۸

$$f(۳-۲x)=۲-g\left(\frac{x}{۲}\right) \rightarrow -۲=۲-g\left(\frac{x}{۲}\right) \rightarrow g\left(\frac{x}{۲}\right)=۴ \rightarrow g^{-1}(۴)=\frac{x}{۲}$$

$$۲g^{-1}(۴)=x$$

$$f(۳-۲x)=-۲ \rightarrow f^{-1}(-۲)=۳-۲x \rightarrow \frac{۳-f^{-1}(-۲)}{۲}=x$$

$$\frac{۳-f^{-1}(-۲)}{۲}=۲g^{-1}(۴) \rightarrow ۳-f^{-1}(-۲)=۴g^{-1}(۴) \rightarrow ۴g^{-1}(۴)+f^{-1}(-۲)=۳$$

۹

$$y=\frac{۵x-۱۳}{۱-x} \xrightarrow[\substack{x\to -x \\ y\to -y}]{\text{قرینه نسبت به مبدا}} -y=\frac{-۵x-۱۳}{۱-(-x)} \Rightarrow y=\frac{۵x+۱۳}{۱+x} \xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y=\frac{۵(x-۲)+۱۳}{۱+x-۲}$$

$$\rightarrow y=\frac{۵x+۳}{x-۱} \xrightarrow[y\to y-۳]{\text{۳ واحد پایین}} y=\frac{۵x+۳}{x-۱}-۳ \rightarrow y=\frac{۵x+۳-۳x+۳}{x-۱} \rightarrow f(x)=\frac{۲x+۶}{x-۱}$$

$$yx-y=۲x+۶ \rightarrow x(y-۲)=y+۶ \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۶}{x-۲}$$

$$\frac{۲x+۶}{x-۱}=\frac{x+۶}{x-۲} \Rightarrow x^۲-۳x-۶=۰$$

جمع ریشه‌ها $=\frac{-b}{a}=\frac{۳}{۱}=۳$

۱۰

$$f(x)=x+۴[x] \rightarrow y=x+۴[x] \xrightarrow[\text{یا قرینه نسبت به } y=x]{\text{وارون}} x=y+۴[y] \rightarrow [x]=[y+۴[y]]$$

$$[x]=[y]+۴[y] \rightarrow [x]=۵[y] \rightarrow \frac{۱}{۵}[x]=[y] \rightarrow x=y+\frac{۴}{۵}[x]$$

$$f^{-1}=g=x-\frac{۴}{۵}[x]$$

$$(f-g)(x)=(x+۴[x])-\left(x-\frac{۴}{۵}[x]\right)=\frac{۲۴}{۵}[x]$$

$$D_{f-g}=\overset{R}{D_f}\cap\overset{[۵k,۵k+۱)}{D_g}$$

$$x\in[۵k,۵k+۱)$$