۱۴,۷۵ آفرین

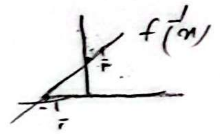
نام و نام خانوادگی ...... سایان هیبتیان ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...... کلاس ...... یازدهم B ......

۱

$2y = 3x - 1 \xrightarrow[x\leftrightarrow y]{} 2x = 3y - 1 \to \frac{2x+1}{3} = f^{-1}(x)$

$\to x = 0 \quad y = \frac{1}{3}$

$\to y = 0 \to 2x+1 = 0 \to x = -\frac{1}{2}$



$\to S_{\text{مثلث}} = \frac{h \times \text{قاعده}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{12}}$

۲

۲

الف) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [1, +\infty) \to$ شکل $\to$ یک‌به‌یک است $R_f = [2, +\infty)$

$\to y = (x-1)^2 + 2 \to y - 2 = (x-1)^2 \to \pm\sqrt{y-2} + 1 = x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-2}+1$

$R_{f^{-1}} = [1, +\infty) \to f^{-1}(x) = +\sqrt{x-2}+1 \quad D_{f^{-1}(x)} = R_f = [2, +\infty)$

ب) $y = x^2 - 2x + 3 \quad x \in [3, +\infty)$

یک‌به‌یک است $\to R_f = [6, +\infty) \to$ ضابطه f^{-1} را بالا حساب کردیم $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}+1$

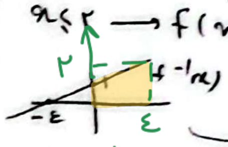
$D_{f^{-1}} = R_f = [6, +\infty)$

۳

$f(x) = 2x - \sqrt{\underbrace{16 - 4x(4-x)}_{4x^2 - 16x + 16}} \to f(x) = 2x - \sqrt{(2x-4)^2} \to f(x) = 2x - |2x-4|$

$x \geq 2 \to f(x) = 4$ یک‌به‌یک نیست

$x \leq 2 \to f(x) = 4x - 4$ یک‌به‌یک است $\to f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad D_{f^{-1}} (-\infty, 4]$



$\to x \leq 2 \to 4x \leq 8 \to 4x - 4 \leq 4 \to R_f \ (-\infty, 4]$

$\to S = (1 \times 4)\frac{1}{2} = \boxed{2}$

مساحت با قسمت (+) محور x ها را می‌خواهد

$\to S = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

۱,۷۵

۴

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} \to y_1 = y_2 \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 5}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2 - 5} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 5}$

$\to (x_1 x_2)^2 - 5x_2^2 = \cancel{(x_1 x_2)^2} - 5x_1^2 \to x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = \pm x_2 \to$ یک‌به‌یک است

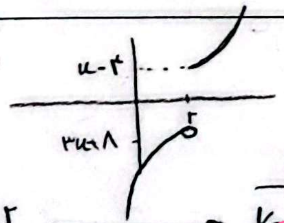
غیرقابل قبول زیرا x و y همواره هم علامت‌اند پس x_1 و x_2 هم هم علامت‌اند

$y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 5} \to x^2 = +\frac{5y^2}{y^2 - 1} \to x = \pm\sqrt{\frac{5y^2}{y^2-1}} = \frac{\pm y\sqrt{5}}{\sqrt{y^2-1}} \xrightarrow{\text{هم علامت‌اند}}$

$x = \frac{y\sqrt{5}}{\sqrt{y^2-1}} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-1}}$

۵

$g(x) \begin{cases} x^2 - 4x + a & x \geq 2 \\ -x^2 + 6x + 3a & x < 2 \end{cases} \longrightarrow$



یک‌به‌یک است $\quad 3a + 8 \geq a - 4 \to 2a \geq -12 \longrightarrow \boxed{a \geq -6}$

۲,۵

$f(x) = 3x + |x| \to x \geq 0 \quad 4x \to f^{-1}(x) = \frac{x}{4} \quad x \geq 0$

$\qquad\qquad\qquad\ \to x \leq 0 \quad 2x \to f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \quad x \leq 0$

$f^{-1}(x) = ax + b|x| \to x \geq 0 \quad a+b\,x \to a+b = \frac{1}{4}$ 6

$\qquad\qquad\qquad\quad x \leq 0 \quad a-b\,x \to a-b = \frac{1}{2} \quad \to a = \frac{3}{8} \quad b = -\frac{1}{8}$

$ab = -\frac{3}{64}$

۲

$f(x) = \frac{3x+4}{x+m} \quad \xrightarrow{(2,-10)} \quad \frac{10}{2+m} = -10 \to -2-m = 1 \to m = -3$

$\to f(x) = \frac{3x+4}{x-3} \to x = -\frac{-3y-4}{y-3} = \frac{3y+4}{y-3} \xrightarrow{x \to y} f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{x-3}$ 7

$y = \underbrace{f \circ f^{-1}(x)}_{x} + f^{-1}(x) = x + \frac{3x+4}{x-3} \xrightarrow[y=x]{\text{نیمساز}} x = x + \frac{3x+4}{x-3}$

$\to \frac{3x+4}{x-3} = 0 \to \boxed{x = -\frac{4}{3}}$

۲

$f(3-2x) = 2 - g\left(\frac{x}{2}\right) \qquad 4g^{-1}(4) + f^{-1}(-2)$

$\xrightarrow{x \to 2x} f(3-4x) = 2 - g(x) \xrightarrow{g(x)=y} f^{-1}(2-y) = 3 - 4x \to f^{-1}(2-y) + 4x = 3$ 8

$\xrightarrow{g^{-1}(y)=x} f^{-1}(2-y) + 4g^{-1}(y) = 3 \xrightarrow{y \to x} f^{-1}(2-x) + 4g^{-1}(x) = 3$

$\xrightarrow{x=4} f^{-1}(-2) + 4g^{-1}(4) = \boxed{3}$

۲

$y = \frac{5x-13}{1-x} \xrightarrow[x \to -x]{y \to -y} -\left(\frac{-5x-13}{1+x}\right) = y \to \frac{5x+13}{1+x} = y$

$\xrightarrow[x \to x-2]{\text{۲ واحد راست}} \frac{5(x-2)+13}{1+(x-2)} = \frac{5x+3}{x-1} \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} \frac{5x+3}{x-1} - 3 = y$ 9

$y = \frac{5x+3-3x+3}{x-1} = \frac{2x+6}{x-1} = f(x) \to f^{-1}(x) = \frac{x+6}{x-2}$

$\to \frac{x+6}{x-2} = \frac{2x+6}{x-1} \to 2x^2+2x-12 = x^2+5x-6 \to x^2-3x-6=0 \to$ جمع ریشه‌ها $\boxed{3}$

۲

$f(x) = x + 4[x] \xrightarrow{x \to y} x = y + 4[y] \to x - 4[y] = y$

$\to x = y + 4[y] \to [x] = [y + 4[y]] = 5[y] \to [y] = \frac{[x]}{5}$ 10

$\to y = x - 4\left(\frac{[x]}{5}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = x - \frac{4}{5}[x] = g(x)$

$(f-g)(x) = x + 4[x] - \left(x - \frac{4}{5}[x]\right) = \boxed{\frac{24}{5}[x]}$

۲