Subject: Date:

Mo Tu We Th Fr Sa Su

۵۰٫۵

شمشیا بهرامی

A

$x=1: f(2(1)+1) + f(1+2) = 3(1) + f(3) \Rightarrow 2f(3) = 3 + f(3) \Rightarrow f(3)=3$ 1

فرض $\Leftarrow f(x)=ax+b$

$\Rightarrow a(2x+1)+b+a(x+2)+b = 3x+3 \Rightarrow 3ax+(3a+2b)=3x+3$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a=3 \Rightarrow \boxed{a=1} \\ 3a+2b=3 \Rightarrow 3+2b=3 \Rightarrow \boxed{b=0} \end{cases} \Rightarrow f(x)=x$

2

اکنون برد تابع زیر را می‌یابیم

$\Rightarrow y=\sqrt{f(x)-x^2} = \sqrt{x-x^2} = \sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$

$(x-\frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-\frac{1}{2})^2 \leq 0 \Rightarrow -(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{R=[0,\frac{1}{2}]}$

$f(x) = \frac{x(x^2-4)}{x+2} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x+2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}-\{-2\} = \mathbb{R}-\{a,b\}$ 2

1

$\Rightarrow a=b=-2$

$x^2-2x=8 \rightarrow \underset{a}{x=-2}$ یا $\underset{b}{x=4}$

$f(x)=x(x-2) \xrightarrow[\text{در برد وجود ندارد}]{f(-2)\ \text{نقطه}} f(-2)=-2(-2-2)=2\times4=8$ اکنون برد آن را به دست می‌گیریم:

پس برد، برد سهمی است به جز $\{8\}$.

$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1 \quad (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2-1 \geq -1 \Rightarrow R_f=[-1,+\infty)-\{8\}$

$=[-1,+\infty)-\{8\}$

$\Rightarrow c=-1$ $\quad f(-1)=3$

$f(\frac{a+b}{2c}) = f(\frac{-2-2}{-2}) = f(2) = (2)^2-2(2) = 4-4 = \boxed{0}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx-8} = \sqrt[3]{(x-\alpha)^3}$ 3

چون خطی است، چند جمله‌ای مقابل زیر رادیکال مکعب کامل است داریم:

$\Rightarrow f(0)=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{-\alpha^3} \Rightarrow \alpha^3=8 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^3} = \sqrt[3]{x^3-6x^2+12x-8}$

2

$\Rightarrow \boxed{a=-6, b=12}, \; f(x)=x-2, \; D_f=[-6,12]$

$\Rightarrow -6 \leq x \leq 12 \Rightarrow -8 \leq x-2 \leq 10 \Rightarrow -8 \leq f(x) \leq 10 \Rightarrow \boxed{R_f=[-8,10]}$

Subject: Date:

Mo Tu We Th Fr Sa Su

۴

$y_1 = \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} \geq 0$

	-1		1	
$-$	0	$+$		$-$

$\Rightarrow D_{f_1} = [-1,1)$

۲

$y_2 = \frac{ax^2-1}{x^2+b}$

اکنون برد y_2 را برحسب a و b ها بدست می‌گیریم:

از طرفی $R_2 = D_1 = [-1,1)$

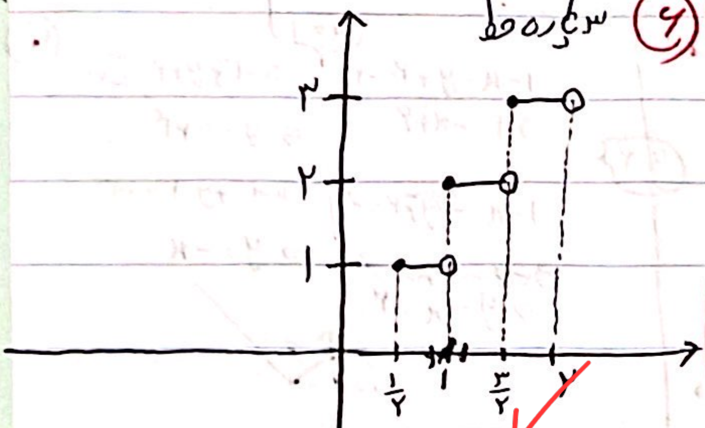
پس برد y_2 باید به شکل یک بازه مثل $[-1,1)$ نوشته شود

$x^2 \begin{cases} \min: 0 \to -\frac{1}{b} \\ \max: +\infty \to a \end{cases}$

$\Rightarrow R_2 = \left[-\frac{1}{b}, a\right) = [-1,1) \Rightarrow -\frac{1}{b} = -1 , a = 1 \Rightarrow \boxed{b=1 , a=1 \Rightarrow a+b=2}$

۶

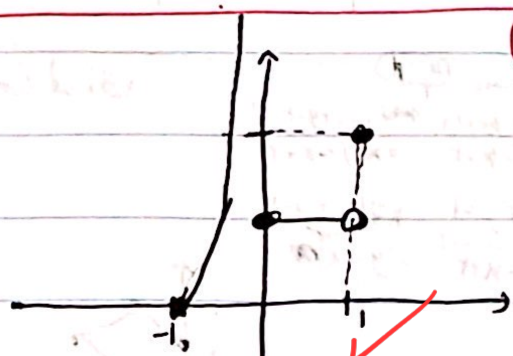
سه پاره‌خط



۲

$[\frac{1}{2},1)$ $y=0+1=1$; $[1,\frac{3}{2})$ $y=1+1=2$; $[\frac{3}{2},2)$ $y=1+2=3$

۵



$[-1,0)$ $y=-\frac{1}{x}-1$ | $[0,1]$ $y=0+1=1$

۲

۷

چون $\left|\frac{x+1}{ax+3}\right| = 1$ تنها یک جواب دارد (که آن $x=b$ است) داریم

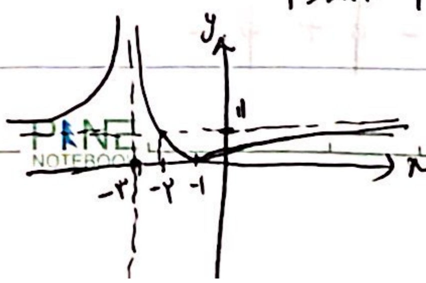
$\left|\frac{x+1}{ax+3}\right| = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{ax+3} = 1$ یا $\frac{x+1}{ax+3} = -1 \Rightarrow x = -\frac{4}{1+a}$ یا $x = -\frac{2}{a-1}$

لذا باید تنها یکی از جواب‌های فوق تعریف شود و $a=+1$ یا $a=-1$. اکنون در دو حالت، تابع را تحلیل می‌کنیم

I) $a=1 \Rightarrow y = \left|\frac{x+1}{x+3}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{b+1}{b+3}\right| \Rightarrow \frac{b+1}{b+3} = \pm 1 \Rightarrow b+1 = b+3$ یا $b+1 = b-3$

$\Rightarrow \underset{\text{غ ق}}{1=3}$ یا $2b=-4 \Rightarrow b=-2$

$R_f = [-2,+\infty)$

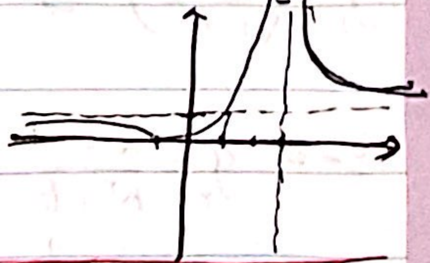


$\boxed{a-b = 1-(-2) = 3}$

۲

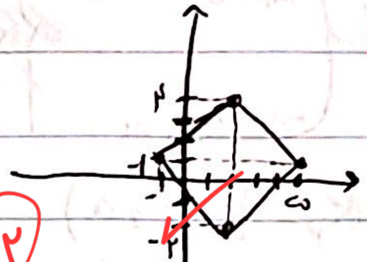
II) $a=-1 \Rightarrow y=\left|\frac{x+1}{-x+3}\right| \Rightarrow 1=\left|\frac{b+1}{-b+3}\right| \Rightarrow \frac{b+1}{-b+3}=\pm 1 \Rightarrow b+1=3-b$ یا $b+1=b-3$

$\Rightarrow 2b=2$ یا $1=-3$ غ ق ق $\Rightarrow b=1$ $R_f=(-\infty,1)$ $\boxed{\text{غ ق ق}}$



۸

$x\geq 2, y\geq 1$	$x<2, y\geq 1$	$x\geq 2, y<1$	$x<2, y<1$
$x-2+y-1=3$	$2-x+y-1=3$	$x-2+1-y=3$	$2-x+1-y=3$
$\Rightarrow y=-x+6$	$\Rightarrow y=x+2$	$\Rightarrow y=x-4$	$y=-x$



۲

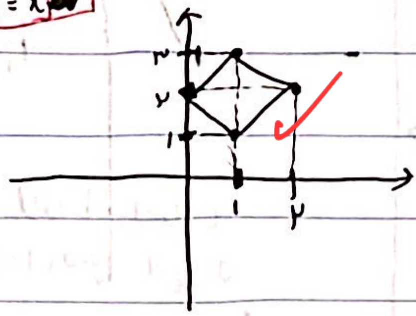
۹

رسم ضابطه بندی

$\boxed{x=1}$ $\boxed{y=2}$

$1-x+y-2=1 \Rightarrow \boxed{y=x+2}$, $x-1+y-2=1 \Rightarrow \boxed{y=-x+4}$

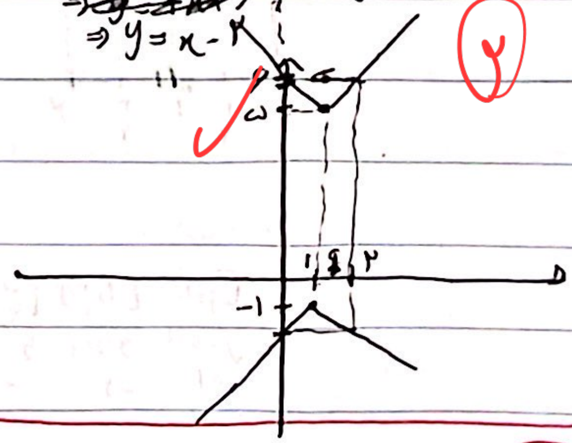
$1-x+2-y=1 \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$, $x-1+2-y=1 \Rightarrow \boxed{y=x}$



$\boxed{x=1}$ $\boxed{y=2}$

$1-x-y+2=-3 \Rightarrow y=-x+6$ | $x-1-y+2=-3 \Rightarrow y=x+4$

$1-x+y-2=-3 \Rightarrow y=x-2$ | $x-1+y-2=-3 \Rightarrow y=-x$



۲

۱۰ تابع را دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$-\frac{b}{a}$; $(3-a)x+b$ | $(3+a)x+b$

برای اینکه برد IR باشد، باید شیب دو ضابطه با یکدیگر برابر شود

چرا که در غیر اینصورت، تابع مینیمم پیدا می‌کند و برد R نیست.

$\Rightarrow (3+a)(3-a)>0 \Rightarrow$

a		-3		3	
	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow \boxed{a\in(-3,3)}$

۲