۲ ع

۱۹,۷۵

جبر ۲ A — شنیا بهرامی

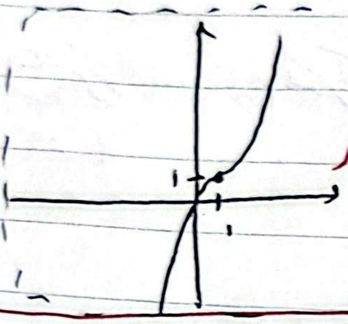
۱) الف) $y=x^3-3x^2+3x \Rightarrow y'=3x^2-6x+3$ $\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی تابع چندجمله‌ای فقط ریشه‌های مشتق است}}$ $y'=0 \Rightarrow 3x^2-6x+3=0$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ الف

x	$-\infty$		ریشه مضاعف 1		$+\infty$
$y'=3(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	

۲

ب) نمودار



۲) نقاط بحرانی جاهایی هستند که در دامنه تابع اصلی هستند و یا مشتق صفر می‌شود یا مشتق ندارد در یا محل تعریف شدگی آنها.

۱,۷۵

الف) $y=\frac{-x^3+4}{x^2}$ $\xrightarrow[\text{در دامنه پیوسته}]{D_f=\mathbb{R}-\{0\}}$ $y'=\frac{(-3x^2)(x^2)-(2x)(-x^3+4)}{(x^2)^2}=\frac{-x^4-8x}{x^4}$

$\Rightarrow y'=\frac{-x(x+2)\overbrace{(x^2+2x+4)}^{\Delta<0}}{x^4}$, $D_{y'}=\mathbb{R}-\{0\}$ و $\underbrace{\overset{\text{غ ق ق}}{x=0}, \cancel{x=2}}_{\text{نقاط بحرانی ریشه‌های مشتق}}$ ($x=-2$) $\} \Rightarrow \boxed{x=2 \text{ نقطه بحرانی}}$

۲

ب) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ $\xrightarrow[\text{در دامنه پیوسته}]{D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}}$ $y'=\frac{3x^2(x^2-1)-(2x)(x^3)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2(x+1)^2}$

$D_{y'}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ و ریشه‌های y': $x=0$ (مضاعف (غ ق ق)), $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{نقاط بحرانی } x=\sqrt{3} \text{ و } x=-\sqrt{3} \text{ و } x=0}$

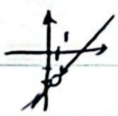
۳) الف) $y=\frac{-x^2+4x+1}{x-1} \Rightarrow y'=\frac{(-2x+4)(x-1)-(1)(-x^2+4x+1)}{(x-1)^2}=\frac{\overset{\Delta<0 \text{ همواره منفی}}{-x^2+2x-5}}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		ریشه مخرج 1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

$\boxed{\text{اکسترمم نسبی ندارد}}$

۲

ب) $y=\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{(x-1)(x-3)}{x-1} \Rightarrow y=x-3 ; x\neq 1$

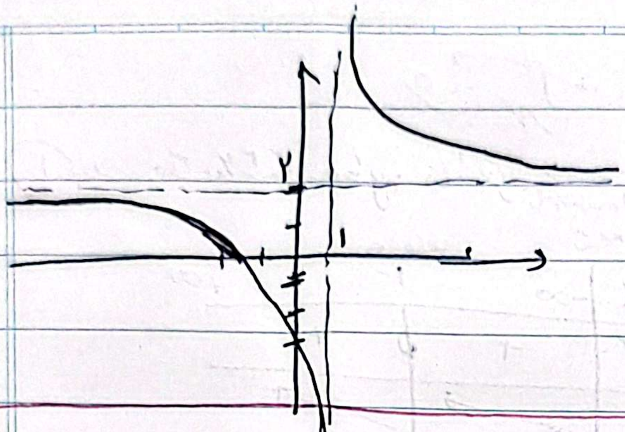


$\boxed{\text{اکسترمم نسبی ندارد}}$

۴) الف) $\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{5}{\text{صفر حدی}}$ = نامتناهی $\Rightarrow$ $x=1$ مجانب قائم

$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$ (و به طور مشابه $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x-1}=2$) $\Rightarrow y=2$ مجانب افقی

۲



ب) نقطه $(-3,0)$ روی تابع است لذا ؛

نقطه $(0,\frac{3}{2})$ زیر روی تابع است

پ) $\boxed{\text{تابع از نواحی اختصاصی عبور می‌کند}}$

۵) مرکز تقارن تابع هموگرافیک محل برخورد مجانب هاست ← $x=2$ مجانب قائم، $y=3$ مجانب افقی

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax+4}{x-b} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax}{x} = a \Rightarrow \underbrace{y=a}_{\text{مجانب قائم}} \Rightarrow \boxed{a=3}$

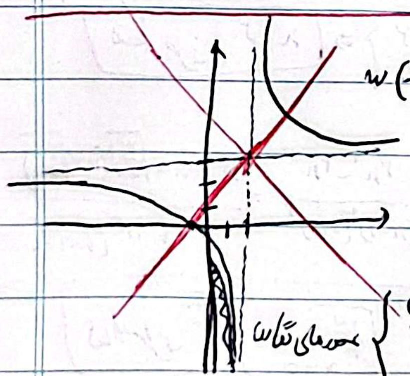
۲

$x=2$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+4}{x-b} = $ ناسازگار $\Rightarrow \underbrace{x=2}_{\text{ریشه مخرج}} \Rightarrow \boxed{b=2}$

عدد غیر صفر ← $3(2)+4=10$

ب) $y=\dfrac{3x+4}{x-2} \Rightarrow yx-2y=3x+4 \Rightarrow (y-3)x=2y+4 \Rightarrow x=\dfrac{2y+4}{y-3} \Rightarrow \boxed{y^{-1}=\dfrac{2x+4}{x-3}}$



۶) هر تابع هموگرافیک $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، مرکز تقارنش محل برخورد مجانب هاست و $w(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ است.

$w\left(-\frac{-2}{1},\frac{3}{1}\right) \to w(2,3)$

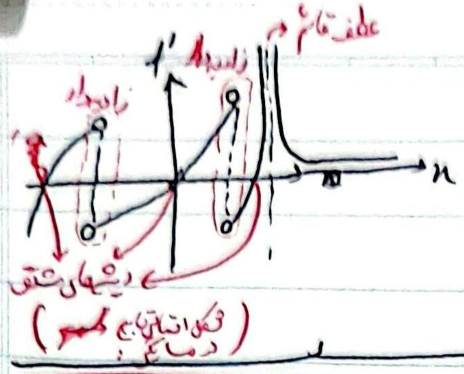
۲

$y'=\dfrac{-6-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-7}{(x-1)^2}$

محورهای تقارن شیب‌های ۱ یا ۱- دارند و از مرکز می‌گذرند

$\begin{cases} y-3=1(x-2) \Rightarrow \boxed{y=x+1} \\ y-3=-1(x-2) \Rightarrow \boxed{y=-x+5} \end{cases}$

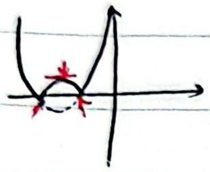
۷) $\boxed{\text{۶ نقطه بحرانی}}$



۲

---

۸) تابع قدر مطلق زمانی یک سهمی تنها در حالتی ۳ نقطه بحرانی دارد که دو ریشه داشته باشد (دو تا مشتق ناپذیری و یکی مشتق ۰)



$\Delta > 0 \Rightarrow (-a)^2 - 4(1)(2) > 0 \Rightarrow a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a^2 > 8 \Rightarrow a > 2\sqrt{2}$ یا $a < -2\sqrt{2}$

$\boxed{a \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)}$

۲

---

۹)

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2} \Rightarrow y' = \frac{(2x)(x^2+x+2) - (2x+1)(x^2+2)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^2-2}{(x^2+x+2)^2} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	+		−		+
y	↗	$\frac{4}{4-\sqrt{2}}$ ماکزیمم نسبی	↘	$\frac{4}{4+\sqrt{2}}$ مینیمم نسبی	↗

حاصلضرب خواسته شده $=$

$$\frac{4}{4-\sqrt{2}} \times \frac{4}{4+\sqrt{2}} = \frac{16}{16-2} = \frac{16}{14} = \boxed{\frac{8}{7}}$$

۲

---

۱۰)

$f(x) = 1(x-1)(x+2) = x^2+x-2 \quad , \quad f'(x) = 2x+1 \quad (\Rightarrow a=1, b=-2)$

$y = f^2(x) \Rightarrow y' = 2f(x)f'(x) = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		−		+		−		+	
y		↘		↗		↘		↗	

حاصل: ماکزیمم نسبی $x = -\frac{1}{2}$

$y = f^3(x) \Rightarrow y' = 3f^2(x)\,f'(x) = 3(x-1)^2(x+2)^2(2x+1)$

x		-2 مضاعف		$-\frac{1}{2}$		1 مضاعف	
y'	−	0	−	0	+	0	+
y	↘		↘		↗		↗

مینیمم نسبی $x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{اختلاف} = 0}$

۲