پرهام شریعتی

۱- فرض کنید $f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ و $\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=2$ مقدار $b+a$ را بیابید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x}\underset{\substack{\text{هم‌ارزی}\\ \cos x}}{=}\frac{\left(1-\frac{4x^2}{2}\right)^3+ax^2+b}{x}\underset{\substack{\text{هم‌ارزی}\\ \text{برنولی}}}{=}\frac{1-6x^2+ax^2+b}{x}=0$$

$$\to \frac{(a-6)x^2+b+1}{x}=0 \to b+1=0 \to b=-1$$

$a+b=+1+(-1)=0$

$$f'(x)=3\times 2\times(-\sin^3(2x))\times\cos^2(2x)+2ax$$

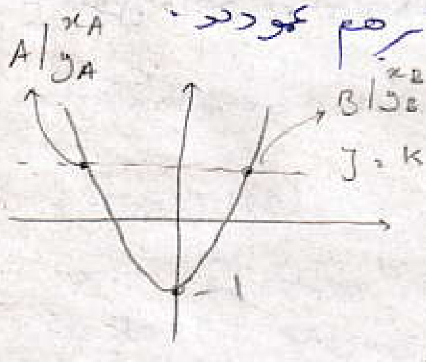
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=2 \to \lim_{x\to 0^-}\frac{6(-\sin^3(2x))(\cos^2(2x))+2ax}{x}\underset{\text{هم‌ارزی}}{=}\frac{(-48x^3)\left(1-\frac{4x}{2}\right)^2+2ax}{x}$$

$$=\frac{(-48x^3)(1-x)+2ax}{x}=2 \to \frac{-48x^3+48x^4+2ax}{x}=2\to\frac{\cancel{x}(48x^3-48x^2+2a)}{\cancel{x}}=2$$

$48x^3-48x^2+2a=2$

$2a=2 \to a=1$

۲- خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^2-1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند.
مجموع عرضهای این دو نقطه را بیابید.



شیب خط مماس اول $m_1=f'(x_A)=2x_A$

شیب خط مماس دوم $m_2=f'(x_B)=2x_B$

$$m_1m_2=-1$$
$$2x_A\cdot 2x_B=-1$$
$$\Downarrow$$
$$x_Ax_B=-\frac{1}{4}$$

می‌دانیم چون خط $x=0$ محور تقارن سهمی است: $x_A=-x_B$ در نتیجه

$$x_A(-x_A)=-\frac{1}{4}\to x_A^2=\frac{1}{4}\xrightarrow[x_A<0]{} x_A=-\frac{1}{2} \text{ و } x_B=\frac{1}{2}$$

حال عرض نقاط را بدست می‌آوریم:

$$f(x_A)=f(-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{3}{4}$$

$$f(x_B)=f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{3}{4}$$

مجموع عرض‌ها: $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\underline{-\frac{3}{2}}$

بهرام شریعتی

۳- خط مماس بر منحنی $f(x) = \dfrac{a}{2x-1}$ از نقاط $(2.5, 6)$ و $(-0.5, -12)$ می‌گذرد مقدار $f(5)$ را بیابید.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-12)}{2.5-(-0.5)} = 6$$

$$y - 6 = (x - 2.5) \longrightarrow y = 6x - 9$$

معادله خط

$$\frac{a}{2x-1} = 6x - 9 \Rightarrow 12x^2 - 24x + 9 - a = 0$$

$$\Delta = 0 \to (24)^2 - 4(12)(9-a) = 0 \longrightarrow 576 - 432 + 48a = 0$$

$$a = -3$$

پس ضابطه f برابر است با: $f(x) = \dfrac{-3}{2x-1}$

$$f(5) = \frac{-3}{10-1} = -\frac{1}{3}$$

۴- اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \dfrac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ را بیابید.

$$y' = \frac{1\times(ax+1) - a(x+a)}{(ax+1)^2} = 2 \longrightarrow \frac{1-a^2}{(ax+1)^2} = 2 \longrightarrow 2a^2+4a+2-1+a^2 = 0 \to 3a^2+4a+1 = 0$$

$$(a+1)(3a+1) = 0$$

$a = -1$ ✗

$a = -\frac{1}{3}$ ✓

به ازای $a=-1$ تابع $y = \frac{x+a}{ax+1}$ تابع ثابت $y=-1$ است و خط $y=2x+b$ نمی‌تواند بر آن مماس شود پس $a=-\frac{1}{3}$ قابل قبول است

$$y = \frac{x - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x + 1} = \frac{3x-1}{-x+3} \xrightarrow{x=1} y = 1$$

نقطه $M(1,1)$ روی خط $y = 2x+b$ نیز قرار دارد $1 = 2+b \to b = -1$

$$a - b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

پرهام شریعتی

۵- در نقطه ی تلاقی منحنی های $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ و $g(x)=\frac{3}{2}\sin x$ در بازه ی $[0,2\pi]$ خط مماس بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط محور xها را در نقطه ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$$\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{3}{2}\sin x \rightarrow \sin x=\cos x \xrightarrow[\text{در بازه ی } [0,\pi]]{} x=\frac{\pi}{4}$$

$$f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

نقطه برخورد: $M\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

خط مماس: $y-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[\text{خط برخورد محور xها}]{y=0} x=\frac{\pi}{4}-3$

۶- فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود که خطوط مماس بر آنها موازی با خط AB است؟

$$f'(x)=6x^2-6x-12=0 \rightarrow x^2-x-2=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$ext\begin{cases} (-1,8) \\ (2,-19) \end{cases} \quad m_{AB}=\frac{8-(-19)}{-1-2}=-9$$

$$6x^2-6x-12=-9 \rightarrow 6x^2-6x-3=0 \xrightarrow{\Delta>0} \text{۲ جواب دارد} \rightarrow \text{۲ نقطه!}$$

پرهام شریعتی

۷- به ازای چه مقدار صحیح و منفی k ، نقطه‌ی عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ در ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات قرار دارد؟

طول نقطه عطف باید منفی باشد

$y' = 3k^2 + 2(k+1)x \longrightarrow y'' = 6kx + 2(k+1) = 0$

$6kx + 2k + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-k-1}{3k} < 0$

	-1		0	
$-$		$+$		$-$

$k > 0$ یا $k < -1$ $\quad (I)$

عرض نقطه عطف باید مثبت باشد $f\left(\frac{-k-1}{3k}\right) > 0$

$k\left(\frac{-k-1}{3k}\right)^3 + (k+1)\left(\frac{-k-1}{3k}\right)^2 > 0 \longrightarrow \frac{-(k+1)^3 + 3(k+1)^3}{27k^2} > 0 \longrightarrow \frac{2(k+1)^3}{\underbrace{27k^2}_{\text{همواره } +}} > 0$

$2(k+1)^3 > 0 \rightarrow (k+1)^3 > 0 \longrightarrow k > -1 \quad (II)$

$I \cap II \longrightarrow k > 0 \longrightarrow$ پس هیچ مقدار صحیح و منفی k وجود ندارد!

۸- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه‌ی $(-۱ , -۴)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ را بیابید.

$M(-1,-4) \longrightarrow f(-1) = -1 + a - b - 1 = -4 \longrightarrow a - b = -2$

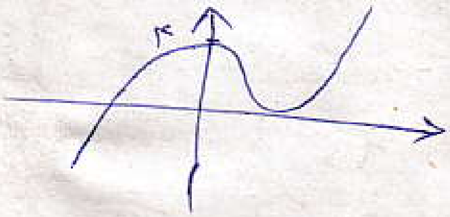
$\longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \longrightarrow -4 = 3 - 2a + b \rightarrow b - 2a = -7$

$a = 9$
$b = 11$

$9/11 = \frac{a}{b}$

پرهام شریعتی

۹- نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع را بیابید.



$f(0)=4 \longrightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+4$

$f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f'(0)=0 \rightarrow 0+0+b=0 \rightarrow b=0$

$\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+4 \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{2a}{3} \end{cases}$

$f(-\frac{2a}{3})=0 \rightarrow (\frac{2a}{3})^3+a(-\frac{2a}{3})^2+4=0 \rightarrow \frac{-8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0$

$a=-3$

طول min نسبی $x=-\frac{2a}{3}=\frac{-2(-3)}{3}=2$

۱۰- فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^4-6x^2+5$ باشند. زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های AB و CD را بیابید.

$f(x)=x^4-6x^2+5 \rightarrow f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$

$0 \qquad \pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
		min		max		min	

$\Rightarrow A(-\sqrt{3},-4)$, $B(\sqrt{3},-4)$

$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$

x		-1		1	
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$\Rightarrow C(-1,0)$, $D(1,0)$

$m_{AB}=\frac{-4-(-4)}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}=0$

$m_{CD}=\frac{0-0}{1-(-1)}=0$

$\rightarrow m_{AB}=m_{CD}$ دو خط موازی‌اند و زاویه‌ی بین آن‌ها صفر درجه یا ۱۸۰ است