$\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=2 \rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{-6\sin(2x)\cos^2(2x)+2ax}{x}=2 \xrightarrow{\text{هم ارز}} \lim_{x\to0^-}\frac{-6\times2x+2ax}{x}=2$

$\rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{(2a-12)x}{x}=2 \rightarrow 2a-12=2 \rightarrow \boxed{a=7}$ $\quad a+b=6$

پرهام شریعتی ۱۵

۱- فرض کنید $f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b$ و

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ و $\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=2$ مقدار $b+a$ را بیابید.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x} \underset{\cos x}{\overset{\text{هم ارزی}}{=}} \frac{\left(1-\frac{4x^2}{2}\right)^3+ax^2+b}{x} \underset{\text{برنولی}}{\overset{\text{هم ارزی}}{=}} \frac{1-6x^2+ax^2+b}{x}=0$$ ①

$$\rightarrow \frac{(a-6)x^2+b+1}{x}=0 \rightarrow b+1=0 \rightarrow b=-1$$ ✓

$a+b=+1+(-1)=0$

$$f'(x)=3\times2\times(-\sin^3(2x))\times\cos^2(2x)+2ax$$

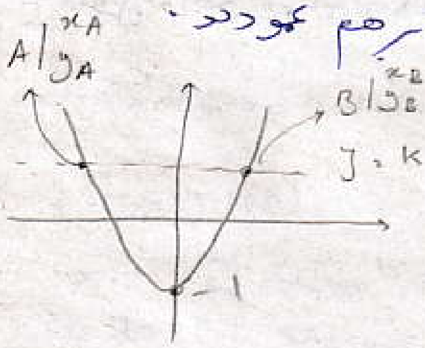
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)}{x}=2 \rightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{6(-\sin^3(2x))(\cos^2(2x))+2ax}{x} \overset{\text{هم ارزی}}{=} \frac{(-48x^3)\left(1-\frac{4x}{2}\right)^2+2ax}{x}$$

$$=\frac{(-48x^3)(1-x)+2ax}{x}=2 \rightarrow \frac{-48x^3+48x^4+2ax}{x}=2 \rightarrow \frac{\cancel{x}(48x^3-48x^2+2a)}{\cancel{x}}=2$$

$48x^3-48x^2+2a=2 \quad a=1$

$2a=2$

۲- خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^2-1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط، بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه را بیابید.



شیب نیم‌مماس اول $m_1=f'(x_A)=2x_A$

شیب نیم‌مماس دوم $m_2=f'(x_B)=2x_B$

$m_1m_2=-1$

$2x_A\,2x_B=-1$

$\Downarrow$

$x_Ax_B=-\frac{1}{4}$

می‌دانیم چون خط $x=0$ محور تقارن سهمی است: $x_A=-x_B$ درنتیجه

$x_A(-x_A)=-\frac14 \rightarrow x_A^2=\frac14 \xrightarrow[x_A<0]{} x_A=-\frac12$ و $x_B=\frac12$

②

حال عرض نقاط را بدست می‌آوریم:

$f(x_A)=f(-\frac12)=\frac14-1=-\frac34$

$f(x_B)=f(\frac12)=\frac14-1=-\frac34$

مجموع عرض: $-\frac34+(-\frac34)=-\frac{3}{2}$ ✓

بهرام شریفی

۳- خط مماس بر منحنی $f(x)=\frac{a}{2x-1}$ از نقاط $(2.5,6)$ و $(-0.5,-12)$ می‌گذرد مقدار $f(5)$ را بیابید

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6-(-12)}{2.5-(-0.5)}=6$$

$$y-6=(x-2.5)\longrightarrow y=6x-9$$

معادله خط

۲

$$\frac{a}{2x-1}=6x-9 \Rightarrow 12x^2-24x+9-a=0$$

$$\Delta=0 \rightarrow (24)^2-4(12)(9-a)=0 \rightarrow 576-432+48a=0$$

$$a=-3$$

پس ضابطه f برابر است با: $f(x)=\frac{-3}{2x-1}$

$$f(5)=\frac{-3}{10-1}=-\frac{1}{3}$$

۴- اگر $y=2x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ را بیابید

$$y'=\frac{1\times(ax+1)-a(x+a)}{(ax+1)^2}=2 \rightarrow \frac{1-a^2}{(ax+1)^2}=2 \rightarrow 2a^2+4a+2-1+a^2=0 \rightarrow 3a^2+4a+1=0$$

$$(a+1)(3a+1)=0$$

$a=-1$ ✗

$a=-\frac{1}{3}$ ✓

به ازای $a=-1$ تابع $y=\frac{x+a}{ax+1}$ تابع ثابت $y=-1$ است و خط $y=2x+b$ نمی‌تواند بر آن مماس شود پس $a=-\frac{1}{3}$ قابل قبول است

$$y=\frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}=\frac{3x-1}{-x+3}\xrightarrow{x=1} y=1$$

۲

نقطه $M(1,1)$ روی خط $y=2x+b$ نیز قرار دارد $1=2+b\rightarrow b=-1$

$$a-b=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

پرهام شریعتی

۵- در نقطه ی تلاقی منحنی های $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x$ و $g(x) = \frac{3}{2}\sin x$ در بازه ی $[0, \pi]$ خط مماس بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط محور xها را در نقطه ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{3}{2}\sin x \rightarrow \sin x = \cos x \xrightarrow[\text{در بازه } [0,\pi]]{} x = \frac{\pi}{4}$

$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

نقطه برخورد: $M(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$

خط مماس: $y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow[\text{خط برخورد محور } x\text{ها}]{y=0} x = \frac{\pi}{4} - 3$

۲

۶- فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود که خطوط مماس بر آنها موازی با خط AB است؟

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

$ext \begin{cases} (-1, 8) \\ (2, -19) \end{cases} \quad m_{AB} = \frac{8-(-19)}{-1-2} = -9$

$6x^2 - 6x - 12 = -9 \rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0}$ ۲ جواب دارد $\rightarrow$ ۲ نقطه!

۲

پرهام شریعتی

۷- به ازای چه مقدار صحیح و منفی k، نقطه‌ی عطف منحنی $y=kx^3+(k+1)x^2$ در ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات قرار دارد؟

طول نقطه‌ی عطف باید منفی باشد

$$y' = 3kx^2+2(k+1)x \longrightarrow y'' = 6kx+2(k+1)=0$$

$$6kx+2k+2=0 \longrightarrow x=\frac{-k-1}{3k}<0$$

	-1		0	
$-$		$+$		$-$

$k>0$ یا $k<-1$ (I)

۲

عرض نقطه عطف باید مثبت باشد $f\left(\frac{-k-1}{3k}\right)>0$

$$k\left(\frac{-k-1}{3k}\right)^3+(k+1)\left(\frac{-k-1}{3k}\right)^2>0 \longrightarrow \frac{-(k+1)^3+3(k+1)^3}{27k^2}>0 \longrightarrow \frac{2(k+1)^3}{\underbrace{27k^2}_{\text{همواره } +}}>0$$

$$2(k+1)^3>0 \longrightarrow (k+1)^3>0 \longrightarrow k>-1 \quad (II)$$

$I\cap II \longrightarrow k>0 \longrightarrow$ در هیچ مقدار صحیح و منفی k وجود ندارد

۸- خط مماس بر منحنی $y=x^3+ax^2+bx-1$ در نقطه‌ی $(-1,-4)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ را بیابید.

$$M(-1,-4) \longrightarrow f(-1)=-1+a-b-1=-4 \longrightarrow a-b=-2$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \longrightarrow -4=3-2a+b \to b-2a=-7$$

$a=9$

$b=11$

$\frac{9}{11}=\frac{a}{b}$

۱

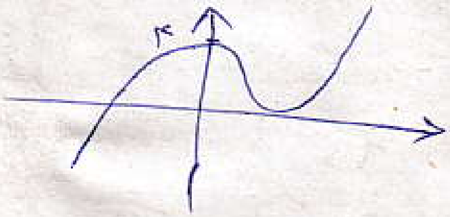
عطف $x=\frac{-b}{3a} \to x=\frac{-a}{3} \to \frac{-a}{3}=-1 \to \boxed{a=3}$

$-4=-1+3-b-1 \to \boxed{b=5}$

$\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$

پرهام شریفی

۹- نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع را بیابید.



$f(0)=4 \rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+4$

$f'(x)=3x^2+2ax+b \rightarrow f'(0)=0 \rightarrow 0+0+b=0 \rightarrow b=0$

$\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+4 \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{2a}{3} \end{cases}$

۲

$f(-\frac{2a}{3})=0 \rightarrow (\frac{2a}{3})^3+a(-\frac{2a}{3})^2+4=0 \rightarrow \frac{-8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}+4=0$

$a=-3$

طول min نسبی $x=-\frac{2a}{3}=\frac{-2(-3)}{3}=2$

۱۰- فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^4-6x^2+5$ باشند. زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های AB و CD را بیابید.

$f(x)=x^4-6x^2+5 \rightarrow f'(x)=4x^3-12x=4x(x^2-3)$

$0 \qquad \pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
	↘	min	↗	max	↘	min	↗

$\Rightarrow A(-\sqrt{3},-4)$, $B(\sqrt{3},-4)$

۲

$f''(x)=12x^2-12=12(x^2-1)$

x		-1		1	
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
	∪		∩		∪

$\Rightarrow C(-1,0)$, $D(1,0)$

$m_{AB}=\frac{-4-(-4)}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}=0$

$m_{CD}=\frac{0-0}{1-(-1)}=0$

$\rightarrow m_{AB}=m_{CD}$ دو خط موازی‌اند و زاویه بین آنها صفر درجه یا ۱۸۰ است