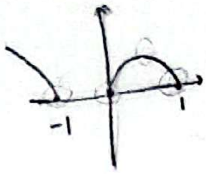
نام و نام خانوادگی : حسام رفیع زاده « به نام خدا » مقطع : دوازدهم پسر A

۱-

$f(x)=\sqrt{x-x|x|}\begin{cases}\sqrt{x-x^{۲}} & x\geq ۰\\ \sqrt{x+x^{۲}} & x<۰\end{cases}$

$\xrightarrow[\text{تقریبی}]{\text{نمودار}}$



$\rightarrow$ تعداد نقاط بحرانی : $k=۴$

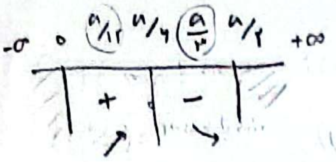
$m=۱$

$n=۰$

$\rightarrow k+m+n=\boxed{۵}$

۲-

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-۲x}\xrightarrow{(۱)'}f'(x)=\dfrac{\sqrt{a-۲x}-۲\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}\times\sqrt{a-۲x}}\xRightarrow{D_f:\ ۰\leq x\leq a/۲}\sqrt{a-۲x}-۲\sqrt{x}=۰\rightarrow x_۰=\dfrac{a}{۶}$



$f_{max}\left(\frac{a}{۶}\right)=\sqrt{\frac{a}{۶}}+\sqrt{a-\frac{a}{۳}}\xrightarrow{\times}\dfrac{a\sqrt{۳}+a۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۸}}=\sqrt{۱۲}$

$f_{min}(a/۲)=\sqrt{a/۲}$

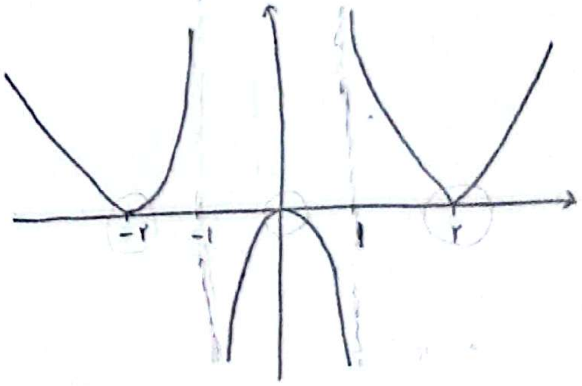
$\rightarrow a=۴\rightarrow\boxed{[a]=۴}$

۳-

$f(x)=\dfrac{x^{۲}|x^{۲}-۴|}{x^{۲}-۱}=\dfrac{x^{۲}|x-۲||x+۲|}{(x-۱)(x+۱)}$

$\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\dfrac{\text{مثبت}}{۰^-}=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-}\dfrac{\text{مثبت}}{۰^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to۱^+}\dfrac{\text{مثبت}}{۰^+}=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to۱^-}\dfrac{\text{مثبت}}{۰^-}=-\infty$



تعداد نقاط اکسترمم نسبی $= x=\pm۲, ۰$, $\boxed{۳\ \text{نقطه}}$

۴-

$y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d\xrightarrow{(۱)'}y'=۳ax^{۲}+۲bx+c\begin{cases}f'(۰)=۰\rightarrow c=۰\\ f'(۱)=۰\rightarrow ۳a+۲b=۰\ ①\end{cases}$

$f(۰)=۰\rightarrow d=۰$

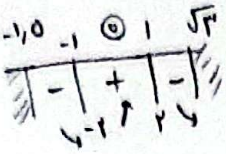
$f(۱)=۱\rightarrow a+b=۱\ ②$

$\xrightarrow{①②}\begin{cases}۳a=-۲b\\ a+b=۱\end{cases}\rightarrow ۱/۳\,b=۱\rightarrow b=۳\ ,\ a=-۲\xrightarrow{ab}=\boxed{-۶}$

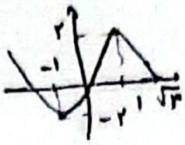
۵-

$$f(x) = x|۳ - x^۲| \xrightarrow{[-۱٫۵, \sqrt{۳}]} f(x) = ۳x - x^۳ \; ; \; [-۱٫۵, \sqrt{۳}]$$

$$\to f'(x) = -۳x^۲ + ۳ = -۳(\underset{\pm ۱}{\underset{\downarrow}{x^۲ - ۱}})$$



$\xrightarrow[\text{تابع}]{\text{نمودار}}$



$$\xrightarrow[\text{نمودار}]{\text{از روی}} \text{مینیمم مطلق} = \boxed{-۲}$$

۶-

$$f(x) = x^۲|x| + ۳ax^۲ + b = \begin{cases} x^۳ + ۳ax^۲ + b & x \geq ۰ \\ -x^۳ + ۳ax^۲ + b & x < ۰ \end{cases} \xrightarrow{(۱)'} f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + ۶ax & x \geq ۰ \\ -۳x^۲ + ۶ax & x < ۰ \end{cases}$$

$$f'(-۱) = ۰ \to -۳ - ۶a = ۰ \to \boxed{a = -۱/۲}$$

$$\to \frac{b}{a} = \frac{۳}{\cancel{۲}} \times -\cancel{۲} = \boxed{۳}$$

$$f(-۱) = ۱ \to ۱ - \frac{۳}{۲} \times (-۱)^۲ + b = ۱ \to \boxed{b = ۳/۲}$$

۷-

$$y = \frac{ax + ۳}{(a+۱)x + (a-۱)} \; , \; \text{محل تلاقی} \begin{cases} x: (a+۱)x = -a + ۱ \to x = \frac{-a+۱}{a+۱} \\ y: \frac{a}{a+۱} \end{cases} \to A\left(\frac{-a+۱}{a+۱}, \frac{a}{a+۱}\right)$$

$$f(x) = ۳/۲ \, x^۲ + x + \frac{d}{۴} \to$$

$$\min = \frac{-b}{۲a} = \boxed{\frac{-۱}{۳}}$$

$$f(-۱/۳) = \boxed{۲/۳}$$

$$\to S(-۱/۳, ۲/۳) = A\left(\frac{-a+۱}{a+۱}, \frac{a}{a+۱}\right)$$

$$\to \boxed{a = ۲}$$

$$y = \frac{۲x + ۳}{۳x + ۱} \xrightarrow[\text{برخورد با محور xها}]{\text{محل}} y = ۰ \to ۲x + ۳ = ۰ \to \underset{\text{محل برخورد}}{x = \boxed{-۳/۲}}$$

-۸

مجانب افقی : $\lim_{x\to\infty} \frac{bx^۲+۷}{۴x^۲+ax+۱} = \frac{bx^۲}{۴x^۲} = \frac{b}{۴} \rightarrow \frac{b}{۴} = ۳ \rightarrow \boxed{b = ۱۲}$

مجانب قائم : ریشه‌ی مخرج $\Rightarrow ۴x^۲+ax+۱ \xrightarrow{x=-۱/۲} ۱ - ۱/۲\, a + ۱ = ۰ \rightarrow -۱/۲\, a = -۲ \rightarrow \boxed{a = ۴}$

$\rightarrow \boxed{\frac{b}{a} = ۳}$

-۹

$$f(x) = \frac{x^۴}{x^۳-۸} \xrightarrow{(۱)'} f'(x) = \frac{۴x^۳(x^۳-۸) - ۳x^۲(x^۴)}{(x^۳-۸)^۲} = \frac{x^۶ - ۳۲x^۳}{(x^۳-۸)^۲} \rightarrow x^۶ - ۳۲x^۳ = ۰$$

$$\underset{\searrow ۰}{x^۳}\,(\underset{\searrow ۲^{\frac{۵}{۳}}}{x^۳ - ۳۲}) = ۰$$

$$\begin{array}{c|c|c||c|c|c} -\infty & ۰ & ① & ۲ & ۲^{۵/۳} & +\infty \\ \hline & + & - & - & + & \end{array}$$

→ از جدول مینیمم طول بازه‌ی اکیداً نزولی $\boxed{(۲, ۲^{\frac{۵}{۳}}]}$ → طول بازه $= \boxed{۲^{۵/۳} - ۲}$

-۱۰

$$f(x) = \frac{x^۴-۳}{x^۲-۳} \xrightarrow{(۱)'} f'(x) = \frac{۴x^۳(x^۲-۳) - ۲x(x^۴-۳)}{\underset{\searrow \pm\sqrt{۳}}{(x^۲-۳)^۲}} \quad , \quad ۴x^۵ - ۱۲x^۳ - ۲x^۵ + ۶x = ۰$$

$$\rightarrow ۲x^۵ - ۱۲x^۳ + ۶x = ۰ \rightarrow \underset{\searrow ۰}{۲x}(x^۴ - ۶x^۲ + ۳) = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۶ \pm \overset{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۲۴}}}{۲} = x^۲ = ۳ \pm \sqrt{۶}$$

$x = \pm\sqrt{۳+\sqrt{۶}}$

$x = \pm\sqrt{۳-\sqrt{۶}}$

$$\begin{array}{c|c|c||c|c|c|c||c|c} -۲ & -\sqrt{۳+\sqrt{۶}} & -\sqrt{۳} & -\sqrt{۳-\sqrt{۶}} & ۰ & \sqrt{۳-\sqrt{۶}} & \sqrt{۳} & \sqrt{۳+\sqrt{۶}} & ۲ \\ \hline - & + & + & - & + & - & - & + & \end{array}$$

→ تعداد بازه‌های اکیداً نزولی $= \boxed{۴}$