نام و نام خانوادگی .... ۱۹ ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۲۲... کلاس ......

۱

$A(0,1) \quad B(3,5)$

$$m_{AB} = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3} \rightarrow f'(3) = \frac{4}{3}$$ ✓

(۲)

۲

$A(-1,1) \,,\, B(2,2)$

$$m_{AB} = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

خط $\rightarrow y-2 = \frac{1}{3}(x-2)$

$$\rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{ax-1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow 3\sqrt{ax-1} = x+4$$

$$\rightarrow 9(ax-1) = x^2+8x+16 \rightarrow x^2+(8-9a)x+25=0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (8-9a)^2 - 4(25) = 0 \rightarrow (8-9a)^2 = 100$$

$8-9a=10 \rightarrow a = -\frac{2}{9} \longrightarrow$ تابع در راستای ... نمی‌شود ✗

$8-9a=-10 \rightarrow a = \frac{18}{9} = 2$ ✓

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3$$ ✓

(۲)

۳

$$y = \frac{x^2+mx+1}{x+3} \rightarrow y' = \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+1)}{(x+3)^2} \rightarrow y'(1) = \frac{(2+m)\times 4 - (1+m+1)}{4^2} = \frac{3}{4}$$

$4y-3x=n \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \rightarrow m = \frac{3}{4} \rightarrow$ شیب خط مماس در $x=1$ برابر این عدد است

$$\rightarrow 4(m+2) - 2 - m = 12$$

$$\rightarrow 3m = 6 \rightarrow m = 2$$

$y = \frac{x^2+2x+1}{x+3} \xrightarrow{x=1} \frac{1+2+1}{1+3} = 1 \rightarrow A(1,1) \rightarrow$ این نقطه روی خط هم قرار دارد ✓

$$\rightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{n}{4} \rightarrow n = 1$$

$$m+n = 2+1 = 3$$

(۲)

۴

$$g(x) = \frac{3}{3+\sin x} \longrightarrow g'(x) = \frac{-3\cos x}{(3+\sin x)^2} \rightarrow g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-3\times\frac{1}{2}}{\left(3+\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{(6-\sqrt{3})^2}{4}} = \frac{-6}{(6-\sqrt{3})^2}$$

$$f(x) = \frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x} = \frac{(3-\sin x)(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)} = \frac{\sin^2 x+3\sin x+9}{3+\sin x} \longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(2\sin x\cos x+3\cos x)(3+\sin x) - (\cos x)(\sin^2 x+3\sin x+9)}{(3+\sin x)^2} \rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{}$$

$$\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 9\right)}{\left(3+\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{39}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{(6-\sqrt{3})^2}{4}} = \frac{-6\sqrt{3} + 3 - \frac{39}{2} + 3\sqrt{3}}{(6-\sqrt{3})^2} = \frac{-\frac{33}{2} - 3\sqrt{3}}{(6-\sqrt{3})^2}$$

(۱)

۵

$$g'(x)\times f'(g(x)) = (f\circ g)'(x)$$

$$x>0 \rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^5} \,,\, x>0 \rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{2x}} \Rightarrow f\circ g(x) = f\left(\frac{1}{2x^5}\right) = -x$$ ✓

$$\xrightarrow{\ '\ } -1$$

$$3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-18}{(6-\sqrt{3})^2} + \frac{\frac{33}{2}+3\sqrt{3}}{(6-\sqrt{3})^2} = \frac{-\frac{3}{2}+3\sqrt{3}}{\frac{36+3-12\sqrt{3}}{39}} = \frac{-\frac{3}{2}+3\sqrt{3}}{39-12\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}}{22}$$

(۲)

$$3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = (3g(x) - f(x))'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow (3g-f)(x) = \left(\frac{9}{3+\sin x} - \frac{27-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}\right) = \frac{9}{3+\sin x} - \frac{(3-\sin x)(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)} = -\sin x$$

$$\rightarrow (3g-f)'(x) = -\cos x \longrightarrow (3g-f)'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

$g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2-1}{x}=\dfrac{1+\sin^2 x-2\sin x-1-\sin^2 x-2\sin x}{(1+\sin^2 x+2\sin x)x}$ $=\dfrac{-4\sin x}{(1+\sin^2 x+2\sin x)x}\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\sin x}{(1+\sin^2 x+2\sin x)x}\rightarrow \sin x\sim x$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x}{(1+x^2+2x)x}=\dfrac{-4}{(1+x^2+2x)}=\dfrac{-4}{1}=-4$	۶
ضابطه ترتیبی بهی شیب به معو یو $y=-x^2-1$ خط افقی d، نمودار تابع را در دو نقطه به طول های α و $-\alpha$ قطع می کند و بنابر فرض مماس های رسم شده در این نقطه بر هم عمودند. $f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-1 \rightarrow (-2\alpha)(2\alpha)=-1$ $f(x)=-x^2-1\rightarrow f'(x)=-2x \rightarrow \alpha^2=\frac{1}{4}$ $f(\alpha)=f(-\alpha)=-\alpha^2-1=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$ معادله خط d به صورت $y=-\frac{5}{4}$ و این خط با مبدأ مختصات فاصله $\frac{5}{4}=1/25$ است.	۷
خط d $\leftarrow y=mx$ $f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^2+3)=mx\rightarrow 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=mx$ (1) $f'(x)=20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}=m$ (2) (1), (2) $\rightarrow 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=(20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})x\rightarrow 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=20x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\rightarrow 12x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}=0$ $\rightarrow 3\sqrt{x}\,(4x^2-1)=0\rightarrow x=0,\ x=\pm\frac{1}{2}$ مقادیر ۰ و $-\frac{1}{2}$ قابل قبول نیستند، زیرا به ازای $x=0$ شیب خط m وجود ندارد و $x=-\frac{1}{2}$ نیز در دامنه نمی گنجد $\leftarrow x=\frac{1}{2}$ ✓ $m=20\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=20\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$	۸
معادله خط d $\leftarrow y=9x$ d و f در نقطه A مماس هستند و شیب آنها در این نقطه برابر است و عرض آنها نیز برابر است. $\sqrt{x}=t\rightarrow f(x)=\dfrac{t}{-2t^4+t^2+1}$ $\dfrac{t}{-2t^4+t^2+1}=9t^2\rightarrow -18t^5+9t^3+9t-1=0$ $\xrightarrow{\prime} -10\,9t^4+27t^2+9=0\rightarrow -9(10t^4-3t^2-1)=0$ $(t^2-\frac{1}{2})(t^2+\frac{1}{5})$ $t^2=\frac{1}{2}$ ، $t^2=-\frac{1}{5}$ × $f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-2(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	۹
$(f\circ g(x))'=g'(x)\times f'(g(x))$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x$ $\rightarrow g'(\frac{\sqrt{5}}{2})=-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}\times\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$ مشتق می گیریم و تابع در نقطه $\frac{\sqrt{5}}{2}$ پیوسته است. $x\to(\frac{\sqrt{5}}{2})^-\rightarrow g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^-}}=\dfrac{1}{(\frac{1}{2})^-}=2^+$ $x\to 2^+\rightarrow [2^+]=2\rightarrow f(x)=(2x)^3=8x^3\rightarrow f'(x)=24x^2\rightarrow f'(2^+)=24\times 4$ پس باید از تابع f به ازای $x\to 2^+$ مشتق بگیریم $f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2}^-))\times g'(\frac{\sqrt{5}}{2}^-)=24\times 4\times -4\sqrt{5}=8(-48\sqrt{5})\rightarrow$ برابر	۱۰