۷ آ۸

مشتق‌ها بهاری

① فرض کنیم خط مماس $g(x)=ax+1$ باشد (عرض از مبدأ ۱ است) و $g'(x)=a$ و $g(3)=5$ ، $f(3)=5$ ، $f'(3)=?$

$\Rightarrow g(3)=3a+1=5 \Rightarrow 3a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{3} \xrightarrow{\text{مماس}} \boxed{f'(3)=g'(3)=a=\frac{4}{3}}$

---

② خط d $(g(x))$ بر تابع f مماس می‌گردد در $A(\alpha, f(\alpha))$ پس $g(\alpha)=f(\alpha)$ و $g'(\alpha)=f'(\alpha)$. توجه کنید $f(x)$ رادیکالی است $(f \geq 0)$.

$d: m=\frac{2-1}{2-(-1)}=\frac{1}{3} \Rightarrow y-2=\frac{1}{3}(x-2)$

$\Rightarrow d: y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}$ ، $f(x)=\sqrt{ax-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax-1}}=\frac{a}{2f(x)}$

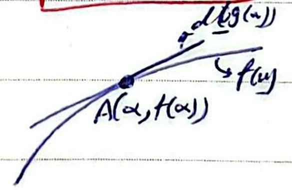
$\frac{1}{3}=\frac{a}{2f(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha)=\frac{3a}{2}$ $(g'(\alpha)=f'(\alpha))$ و $\frac{1}{3}\alpha+\frac{4}{3}=\sqrt{a\alpha-1}=f(\alpha)$ $(g(\alpha)=f(\alpha))$ $\Rightarrow \frac{1}{3}\alpha+\frac{4}{3}=\frac{3}{2}a \Rightarrow \alpha=\frac{9}{2}a-4$

$\sqrt{a\alpha-1}=\frac{3a}{2} \Rightarrow \sqrt{a(\frac{9}{2}a-4)-1}=\frac{3a}{2} \Rightarrow a(\frac{9}{2}a-4)-1=\frac{9a^2}{4}=\frac{9}{2}a^2-4a-1 \Rightarrow \frac{9}{4}a^2-4a-1=0$

$\Rightarrow a=2$ یا $a=-\frac{2}{9}$ $\Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x-1} \Rightarrow \boxed{f(5)=\sqrt{9}=3}$

$a=2 \Rightarrow f(\alpha)=\frac{3a}{2}\geq 0$ قق

$a=-\frac{2}{9} \Rightarrow f(\alpha)=\frac{3a}{2}<0$ غقق



---

③ $f(x)=\frac{x^2+mx+1}{x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+m)(x+3)-(1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+3m-1}{x^2+6x+9} \Rightarrow f'(1)=\frac{6+3m}{16}$

$4y_2=3x+n \Rightarrow y_2=\frac{3}{4}x+\frac{n}{4} \Rightarrow y_2'=\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{مماس}} y_2'=f'(1) \Rightarrow \frac{6+3m}{16}=\frac{3}{4} \Rightarrow m=2$

مماس: $f(1)=\frac{3}{4}(1)+\frac{n}{4} \Rightarrow \frac{2+2}{4}=\frac{3}{4}+\frac{n}{4} \Rightarrow n=1$

$\Rightarrow \boxed{m+n=3}$

---

④ $f(x)=\frac{3^3-\sin^3 x}{9-\sin^2 x}=\frac{(3-\sin x)(9+\sin^2 x+3\sin x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}=\frac{9+3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x}$ ، $g(x)=\frac{3}{3+\sin x}$

$\Rightarrow (3g-f)(x)=\frac{9}{3+\sin x}-\frac{9+3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x}=-\frac{3\sin x+\sin^2 x}{3+\sin x}=-\sin x \Rightarrow (3g-f)'(x)=-\cos x$

$\Rightarrow (3g-f)'(\frac{5\pi}{3})=\boxed{3g'(\frac{5\pi}{3})-f'(\frac{5\pi}{3})=-\cos\frac{5\pi}{3}=-\frac{1}{2}}$

⑤

$f(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \; ; \; x>0$

$g(x) = \frac{1}{x^{3}} \; ; \; x>0$

$x<0 : x = -|x| \Rightarrow x + |x| = 0$ ... $x^{3} + x^{3} = -|x|^{3} + x^{3}|x|^{3} = 0$

$(f\circ g)(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^{3}}}} \Rightarrow (f\circ g)'(\sqrt{2}) = g'(\sqrt{2}) \times f'(g(\sqrt{2})) = -1$

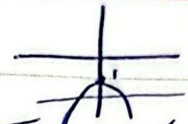
⑥

$g(x) = \frac{f(x)-1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^{2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2} - 1}{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^{2} - (x+1)^{2}}{(x+1)^{2} \times x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{(x+1)^{2} \times x} = \frac{-4}{1} = -4$ (البته همان مشتق $f(0)$ بود اما تر صحیح دادم در جهت لایک)

⑦

تبدیل: $f(x) = -x^{2} - 1 \Rightarrow f'(x) = -2x$



چون خط مماس بر تابع f را در دو نقطه قطع قطع خواهد کرد با توجه به اینکه تابع زوج است پس طول این دو نقطه قرینه یکدیگر و شیب آنها قرینه (متعامد) زاویه بین دو مماس

$\tan 90 = \left|\frac{m-(-m)}{1-(-m)(m)}\right| = \left|\frac{2m^{2}}{1+m^{2}}\right| \Rightarrow \frac{2m}{1+m^{2}} = 1 \Rightarrow m^{2}+1 = 2m \Rightarrow m^{2}-2m+1 = 0$

پس شیب f' این دو نقطه قرینه یکدیگر است $(-m, m)$, $m>0$

$\Rightarrow (m-1)^{2} = 0 \Rightarrow m = 1$, $\Rightarrow f'(\alpha) = -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) = -(-\frac{1}{2})^{2} - 1 = -\frac{5}{4} \Rightarrow d: y = -\frac{5}{4}$

$f'(\beta) = -2\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\beta) = -(\frac{1}{2})^{2} - 1 = -\frac{5}{4}$

فاصله تا مبدأ $\frac{5}{4}$ است

⑧

$d: y = mx \Rightarrow y' = m \; , \; f(x) = 2\sqrt{x}(4x^{2}+3) \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^{2}+3}{\sqrt{x}} + 16x\sqrt{x}$

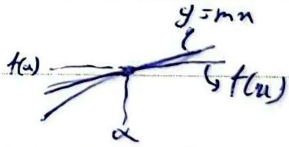
چون مماس است در نقطه α پس داریم: $m = f'(\alpha)$ و $m\alpha = f(\alpha)$ ، چون $\alpha \geq 0$ چون دامنه f است $x \geq 0$

$m = \frac{4\alpha^{2}+3}{\sqrt{\alpha}} + 16\alpha\sqrt{\alpha}$, $m\alpha = 2\sqrt{\alpha}(4\alpha^{2}+3) \Big\} \Rightarrow \alpha\left(\frac{4\alpha^{2}+3}{\sqrt{\alpha}} + 16\alpha\sqrt{\alpha}\right) = 2\sqrt{\alpha}(4\alpha^{2}+3)$

$(4\alpha^{2}+3)\sqrt{\alpha} + 16\alpha^{2}\sqrt{\alpha}$

$\overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} 4\alpha^{2}+3 + 16\alpha^{2} = 2(4\alpha^{2}+3)$

$\Rightarrow 12\alpha^{2} = 3 \Rightarrow \alpha^{2} = \frac{1}{4} \overset{\alpha\geq 0}{\Rightarrow} \alpha = \frac{1}{2}$



$m = \frac{4(\frac{1}{2})^{2}+3}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + 16(\frac{1}{2})(\sqrt{\frac{1}{2}}) = 8\sqrt{2}$

⑨

$d: y = mx \Rightarrow y' = m \; , \; f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-2x^{2}+x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2x^{2}+x+1) - \sqrt{x}(-4x+1)}{(-2x^{2}+x+1)^{2}}$

چون دو تابع در نقطه مماس هستند $m = f'(\alpha)$ و $m\alpha = f(\alpha)$ (چون دامنه f در $x \geq 0$ پس $\alpha \geq 0$) (البته α نقطه $(0,0)$ نیست!)

$m = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(-2\alpha^{2}+\alpha+1) - \sqrt{\alpha}(-4\alpha+1)}{(-2\alpha^{2}+\alpha+1)^{2}}$

$m\alpha = \frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^{2}+\alpha+1}$

$\Big\} \Rightarrow \alpha\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(-2\alpha^{2}+\alpha+1) + \sqrt{\alpha}(4\alpha-1)}{(-2\alpha^{2}+\alpha+1)^{2}}\right) = \frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^{2}+\alpha+1}$

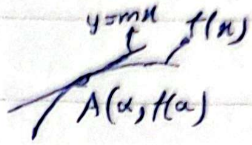
$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(-2\alpha^{2}+\alpha+1) + \alpha\sqrt{\alpha}(4\alpha-1)}{(-2\alpha^{2}+\alpha+1)^{2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^{2}+\alpha+1}$

9.

$\Rightarrow \alpha \neq 0 \quad 4(-2\alpha^2+\alpha+1)+\alpha(4\alpha-1)=-2\alpha^2+\alpha+1 \Rightarrow 5\alpha^2-2\alpha-\frac{1}{4}=0$

$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{2} \;,\; \alpha=-\frac{1}{5} \xrightarrow{\alpha>0} \alpha=\frac{1}{2}$

$f(\alpha)=f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-2(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})+1}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$



---

(10) g در نقطه به جز $x=\pm1$ پیوسته است و f نیز در $x=2$ از راست پیوسته است. ($\lim_{x\to\frac{\sqrt{5}}{2}^-} g(x)=g(\frac{\sqrt{5}}{2})=2$)

پس $f\circ g(x)$ در $\frac{\sqrt{5}}{2}$ پیوستگی از چپ دارد.

$(f\circ g)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=g'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})\times f'_+(g(\frac{\sqrt{5}}{2}))=g'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})\,f'_+(2)$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}(2x)=-x(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \Rightarrow g'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=-4\sqrt{5}=g'(\frac{\sqrt{5}}{2})$

$f(x)=(x[x])^3 \Rightarrow f'(x)=3(x[x])^2(1\times[x]+x\times 0)=3x^2[x]^3 \Rightarrow f'_+(2)=\underset{(\text{پیوسته از راست})}{f'(2)}=3\times4\times8=96$

$\Rightarrow (f\circ g)'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=-4\sqrt{5}\times96=8\times(-48\sqrt{5}) \Rightarrow$ **جواب: ۸ برابر**