۱۲ آ

مشتقها بهرامی

۲۰

①

فرض کنیم خط مماس $g(x)=ax+1$ باشد (عرض از مبدأ ۱ است) $f(۳)=۵,\ f'(۳)=?,\ g(۳)=۵$ و $g'(x)=a$

$\Rightarrow g(۳)=۳a+1=۵ \Rightarrow ۳a=۴ \Rightarrow a=\frac{۴}{۳} \xrightarrow{\text{مماس}} \boxed{f'(۳)=g'(۳)=a=\frac{۴}{۳}}$ ✓

۲

---

②

خط d $(g(x))$ بر تابع f مماس می‌گردد پس در $A(\alpha, f(\alpha))$، $g(\alpha)=f(\alpha)$ و $g'(\alpha)=f'(\alpha)$. توجه کنید $f(\alpha)$ جذر مثبت $(+\geq 0)$ است.

$d: m=\frac{۲-1}{۲-(-1)}=\frac{1}{۳} \Rightarrow y-۲=\frac{1}{۳}(x-۲)$

$\Rightarrow d: y=\frac{1}{۳}x+\frac{۴}{۳} \Rightarrow y'=\frac{1}{۳},\quad f(x)=\sqrt{ax-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{a}{۲\sqrt{ax-1}}=\frac{a}{۲f(x)}$

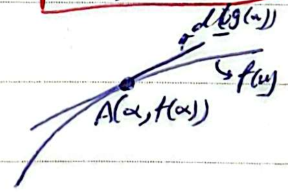
$\frac{1}{۳}=\frac{a}{۲f(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha)=\frac{۳a}{۲}$ و $\frac{1}{۳}\alpha+\frac{۴}{۳}=\sqrt{a\alpha-1}=f(\alpha)$ $\Big\} \Rightarrow \frac{1}{۳}\alpha+\frac{۴}{۳}=\frac{۳}{۲}a \Rightarrow \alpha=\frac{۹}{۲}a-۴$

$\leftarrow g'(\alpha)=f'(\alpha)$ $\qquad \leftarrow g(\alpha)=f(\alpha)$

$\sqrt{a\alpha-1}=\frac{۳a}{۲} \Rightarrow \sqrt{a(\frac{۹}{۲}a-۴)-1}=\frac{۳a}{۲} \Rightarrow a(\frac{۹}{۲}a-۴)-1=\frac{۹a^۲}{۴}=\frac{۹}{۲}a^۲-۴a-1 \Rightarrow \frac{۹}{۴}a^۲-۴a-1=0$ ✓

$\Rightarrow a=۲$ یا $a=-\frac{۲}{۹} \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f(x)=\sqrt{۲x-1} \Rightarrow \boxed{f(a)=\sqrt{۹}=۳}$

$\Downarrow$ $f(\alpha)=\frac{۳a}{۲}\geq 0$ قق $\qquad$ $\Downarrow$ $f(\alpha)=\frac{۳a}{۲}<0$ غق



۲

---

③

$f(x)=\frac{x^۲+mx+1}{x+۳} \Rightarrow f'(x)=\frac{(۲x+m)(x+۳)-(1)(x^۲+mx+1)}{(x+۳)^۲}=\frac{x^۲+۶x+۳m-1}{x^۲+۶x+۹} \Rightarrow f'(1)=\frac{۶+۳m}{1۶}$

$۴y_۲=۳x+n \Rightarrow y_۲=\frac{۳}{۴}x+\frac{n}{۴} \Rightarrow y_۲'=\frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{مماس}} y_۲'=f'(1) \Rightarrow \frac{۶+۳m}{1۶}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow m=۲$

مماس: $f(1)=\frac{۳}{۴}(1)+\frac{n}{۴} \Rightarrow \frac{\overset{۲}{m}+۲}{۴}=\frac{۳}{۴}+\frac{n}{۴} \Rightarrow n=1$

$\Big\} \Rightarrow \boxed{m+n=۳}$ ✓

۲

---

④

$f(x)=\frac{۳^۳-\sin^۳x}{۹-\sin^۲x}=\frac{(۳-\sin x)(۹+\sin^۲x+۳\sin x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)}=\frac{۹+۳\sin x+\sin^۲x}{۳+\sin x},\quad g(x)=\frac{۳}{۳+\sin x}$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $(۳g-f)(x)=\frac{۹}{۳+\sin x}-\frac{۹+۳\sin x+\sin^۲x}{۳+\sin x}=-\frac{۳\sin x+\sin^۲x}{۳+\sin x}=-\sin x \Rightarrow (۳g-f)'(x)=-\cos x$

$\Rightarrow (۳g-f)'(\frac{۵\pi}{۳})=\boxed{۳g'(\frac{۵\pi}{۳})-f'(\frac{۵\pi}{۳})=-\cos\frac{۵\pi}{۳}=-\frac{1}{۲}}$ ✓

۲

$f(x)$: $x\leq 0 : x=-|x| \Rightarrow x+|x|=0$ [illegible] تعریف نشده

یعنی $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\ ;\ x>0$

$g(x)=\frac{1}{2x^{2}}\ ;\ x>0$

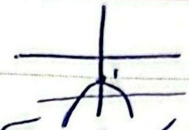
۵ ۲

$(f\circ g)(x)=-\frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot\frac{1}{2x^{2}}}}$ ~~$\frac{-x}{\sqrt[3]{2}}$~~ $\Rightarrow (f\circ g)'(x)=$ $\boxed{g'(\sqrt{2})\times f'(g(\sqrt{2}))=-1}$ ✓

$g(x)=\frac{f(x)-1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)^{2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2}-1}{x}$ ۶

$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{(x-1)^{2}-(x+1)^{2}}{(x+1)^{2}\times x}=\lim_{x\to0}\frac{-4x}{(x+1)^{2}\times x}=\frac{-4}{1}=\boxed{-4}$ (البته حاصل همسان $f(x)$ بود اما ترجیح دادم در حد امکان [illegible] ✓ ۲

تبدیل $\rightsquigarrow$ $f(x)=-x^{2}-1 \Rightarrow f'(x)=-2x$ ۲ ۷



چون خط مماس است تابع f را در دو نقطه قطع خواهد کرد با توجه به اینکه تابع زوج است پس طول این دو نقطه قرینه یکدیگر و مشتق آنها قرینه [illegible] معرف

زاویه بین دو مماس

$\tan ۴۵ = \left|\frac{m-(-m)}{1-(-m)(m)}\right| = \left|\frac{2m}{1+m^{2}}\right| \Rightarrow \frac{2m}{1+m^{2}}=1 \Rightarrow m^{2}+1=2m \Rightarrow m^{2}-2m+1=0$

پس شیب f در این دو نقطه قرینه یکدیگر است $(-m, m)$ $m>0$

$\Rightarrow (m-1)^{2}=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow f'(\alpha)=-2\alpha=1 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha)=-(-\frac{1}{2})^{2}-1=-\frac{5}{4} \Rightarrow d: y=-\frac{5}{4}$ ⇒ $\boxed{\text{فاصله تا مبدأ } \frac{5}{4} \text{ است}}$

$f'(\beta)=-2\beta=-1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{2} \Rightarrow f(\beta)=-(\frac{1}{2})^{2}-1=-\frac{5}{4}$ ✓

$d: y=mx \Rightarrow y'=m\ ,\ f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^{2}+3) \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^{2}+3}{\sqrt{x}}+16x\sqrt{x}$ ۸

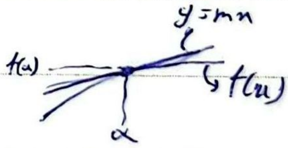
چون مماس در نقطه α دو تابع مماس اند: $m\alpha=f(\alpha)$ و $m=f'(\alpha)$ ، چون دامنه f ، $x\geq0$ است $\alpha\geq0$

① $m=\frac{4\alpha^{2}+3}{\sqrt{\alpha}}+16\alpha\sqrt{\alpha}$, $m\alpha=2\sqrt{\alpha}(4\alpha^{2}+3)$ $\Big\} \Rightarrow \underbrace{\alpha\left(\frac{4\alpha^{2}+3}{\sqrt{\alpha}}+16\alpha\sqrt{\alpha}\right)}_{(4\alpha^{2}+3)\sqrt{\alpha}+16\alpha^{2}\sqrt{\alpha}}=2\sqrt{\alpha}(4\alpha^{2}+3)$

$\overset{\alpha\neq0}{\Rightarrow} 4\alpha^{2}+3+16\alpha^{2}=2(4\alpha^{2}+3)$

$\Rightarrow 12\alpha^{2}=3 \Rightarrow \alpha^{2}=\frac{1}{4} \overset{\alpha\geq0}{\Rightarrow} \alpha=\frac{1}{2}$

② $\boxed{m=\frac{4(\frac{1}{2})^{2}+3}{\sqrt{\frac{1}{2}}}+16(\frac{1}{2})(\sqrt{\frac{1}{2}})=8\sqrt{2}}$ ✓



۲

$d: y=mx \Rightarrow y'=m\ ,\ f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^{2}+x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2x^{2}+x+1)-\sqrt{x}(-4x+1)}{(-2x^{2}+x+1)^{2}}$ ۹

چون دو تابع در نقطه $(\alpha, f(\alpha))$ مماس هستند $m\alpha=f(\alpha)$, $m=f'(\alpha)$ ، چون در دامنه f است $x\geq0$ پس $\alpha\geq0$ (البته نقطه $(0,0)$ نیست!)

$m=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(-2\alpha^{2}+\alpha+1)-\sqrt{\alpha}(-4\alpha+1)}{(-2\alpha^{2}+\alpha+1)^{2}}$

$m\alpha=\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^{2}+\alpha+1}$

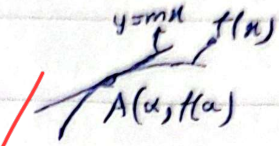
$\Big\} \Rightarrow \underbrace{\alpha\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(-2\alpha^{2}+\alpha+1)+\sqrt{\alpha}(4\alpha-1)}{(-2\alpha^{2}+\alpha+1)^{2}}\right)}=\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^{2}+\alpha+1}$

$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{2}(-2\alpha^{2}+\alpha+1)+\alpha\sqrt{\alpha}(4\alpha-1)}{(-2\alpha^{2}+\alpha+1)^{2}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{-2\alpha^{2}+\alpha+1}$

$⇒ \cancel{α\frac{۱}{۲}}\ \frac{۱}{۲}(-۲α^۲+α+۱) + α(۴α-۱) = -۲α^۲+α+۱ ⇒ ۵α^۲ - \frac{۳}{۲}α - \frac{۱}{۲} = 0$ ۹.

$⇒ α = \frac{۱}{۲} \text{ ، } α = -\frac{۱}{۵} \xrightarrow{α>0} α = \frac{۱}{۲}$

$\boxed{f(α) = f(\tfrac{۱}{۲}) = \frac{\sqrt{\frac{۱}{۲}}}{-۲(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۲})+۱} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}$



✓ ۲

---

۱۵ g در همه نقاط به جز $x=\pm۱$ پیوسته است و f نیز در $x=۲$ از راست پیوسته است. $(\lim_{x\to\frac{\sqrt{۵}}{۲}^-} g(x) = g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = ۲)$

پس $fog(x)$ در $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ پیوستگی از چپ دارد.

$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = g'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) \times f'_+(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})) = g'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})\, f'_+(۲)$ ۲

$g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}} = (x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}} ⇒ g'(x) = -\frac{۱}{۲}(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}(۲x) = -x(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -\frac{x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}} ⇒ g'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = -۴\sqrt{۵}$
$= g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})$

$f(x) = (x[x])^۳ ⇒ f'(x) = ۳(x[x])^۲(۱×[x] + x×0) = ۳x^۲[x]^۳ ⇒ f'_+(۲) = \underset{(\text{پیوسته از راست})}{f'(۲)} = ۳×۴×۸ = ۲×۴۸$

$⇒ (fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲}) = -۴\sqrt{۵}×۲×۴۸ = ۸×(-۴۸\sqrt{۵}) ⇒$ $\boxed{\text{جواب: ۸ برابر}}$ ✓