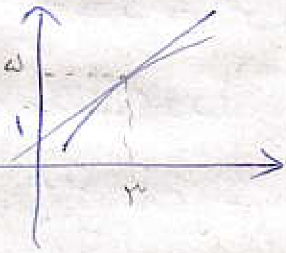
برهام شریعتی

۱- نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه‌ی $(3,5)$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار $f'(3)$ را بیابید.



دو نقطه‌ی $(0,1)$ و $(3,5)$ روی خط مماس بر تابع اند

$$f'(3) = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ۳ با مشتق تابع در آن نقطه برابر است.

۲- خط مماس بر منحنی $f(x)=\sqrt{ax-1}$ در نقطه A از نقاط $(-1,1)$ و $(2,2)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ را بیابید.

$$m = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

معادله خط مماس $\Rightarrow y-1 = \frac{1}{3}(x+1) \longrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$$\sqrt{ax-1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \longrightarrow 9(ax-1) = x^2+8x+16 \longrightarrow x^2+(8-9a)x+25=0$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow (8-9a)^2 - 4(25) = 0 \longrightarrow \begin{cases} 8-9a=10 \longrightarrow a=-\frac{2}{9} \ \times \\ 8-9a=-10 \longrightarrow a=2 \ \checkmark \end{cases}$$

به ازای این مقدار a مشتق در نقطه ۵ تعریف نشده است

$$a=2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x-1} \longrightarrow f(5)=\sqrt{9}=3$$

برهام شریعتی

۳_ معادله خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^2+mx+1}{x+3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y-3x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

شیب خط $=\frac{3}{4}$

$$y'=\frac{(2x+m)(x+3)-(1)(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}\xrightarrow{x=1}y'(1)=\frac{3(2+m)}{16}=\frac{3}{4}$$

$m=2$

$$4y-3x=n\xrightarrow[x=1]{}4y-3=n\to y=\frac{n+3}{4}$$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+3}\xrightarrow[x=1]{}y=\frac{1+m+1}{1+3}\xrightarrow{m=2}y=1$$

$$\frac{n+3}{4}=1\longrightarrow n=1$$

$$n+m=1+2=3$$

۴_ اگر $f(x)=\frac{27-\sin^3x}{9-\sin^2x}$ و $g(x)=\frac{3}{3+\sin x}$ باشد، حاصل عبارت $3g'(\frac{5\pi}{3})-f'(\frac{5\pi}{3})$ را بیابید.

$$3g'(\tfrac{5\pi}{3})-f'(\tfrac{5\pi}{3})=(3g'-f')(\tfrac{5\pi}{3})=(3g-f)'(\tfrac{5\pi}{3})$$

$$(3g-f)(x)=\frac{3\times 3}{3+\sin x}-\frac{27-\sin^3x}{9-\sin^2x}=\frac{9}{3+\sin x}-\frac{(3-\sin x)(9+3\sin x+\sin^2x)}{(3-\sin x)(3+\sin x)}$$

$$=\frac{-3\sin x-\sin^2x}{3+\sin x}=\frac{-\sin x(3+\sin x)}{3+\sin x}=-\sin x$$

$$(3g-f)(x)=-\sin x\Rightarrow(3g-f)'(x)=-\cos x\to(3g-f)'(\tfrac{5\pi}{3})=-\cos\tfrac{5\pi}{3}$$

$$-\cos(2\pi-\tfrac{\pi}{3})=-\cos(\tfrac{\pi}{3})=-\tfrac{1}{2}$$

پرهام شریعتی

۵ - اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5+|x^5|}$ مقدار $g'(\sqrt[5]{3})\, f'(g(\sqrt[5]{3}))$ را بیابید.

$g'(\sqrt[5]{3})\, f'(g(\sqrt[5]{3})) = (f\circ g)'(\sqrt[5]{3})$

$g(x) = \begin{cases} \text{تن} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2x^5} & x > 0 \end{cases}$ $\quad f(x) \begin{cases} \text{تن} & x \leq 0 \\ \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}} & x > 0 \end{cases}$

$x > 0 \to f\circ g(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2g(x)}} = \frac{-1}{\sqrt[5]{2\times\frac{1}{2x^5}}} = -x$

$(f\circ g)'(x) = -1 \to (f\circ g)'(\sqrt[5]{3}) = 1$

۶ - اگر $f(x) = \left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$ و $f(x) = xg(x)+1$ باشد حاصل $\lim_{x\to 0} g(x)$ را بیابید.

$f(x) = xg(x)+1 \to g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$

$g(x) = \frac{\frac{\sin^2 x - 2\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1} - 1}{x} = \frac{\frac{-4\sin x}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}}{x}$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-4\sin x}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}}{x} \underset{\text{هم‌ارزی}}{\simeq} \frac{\frac{-4x}{x^2+2x+1}}{x} = \frac{-4}{x^2+2x+1} = -4$

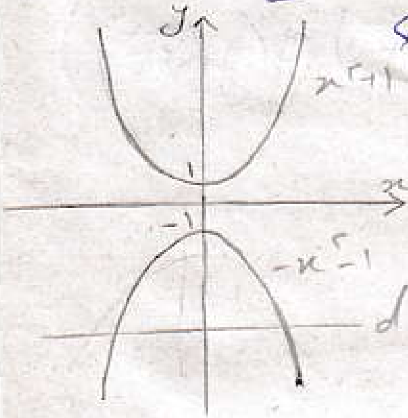
(۲) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} \xrightarrow[0/0]{Hop} \frac{f'(x)}{1} = f'(0)$

$f'(x) = 2\left(\frac{\cos x(1+\sin x) - \cos x(-1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}\right)\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right) = \frac{4\cos x(-1+\sin x)}{(1+\sin x)^3}$

$f'(0) = \frac{4\times 1(-1)}{1} = -4$

برهام شریعتی

۷ - خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y=x^2+1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می کند و مماس های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟



$$\begin{cases} f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=-1 \\ f(x)=-x^2-1 \to f'(x)=-2x \end{cases} \Longrightarrow (-2\alpha)(2\alpha)=-1 \qquad \alpha^2=\frac{1}{4}$$

$$f(\alpha)=f(-\alpha)=-\alpha^2-1=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$$

d معادله خط $\Rightarrow y=-\frac{5}{4}$

فاصله از مبدأ مختصات $=\frac{5}{4}$

۸ - خط d از مبدأ مختصات می گذرد و بر نمودار تابع f مماس است. شیب خط d را بیابید.

$f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^2+3)$ $\qquad y=mx$ معادله خط d

$$f(x)=2\sqrt{x}\,(4x^2+3)=mx \longrightarrow 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=mx$$

$$f'(x)=20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}=m$$

$$\longrightarrow 8x^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}=\left(20x^{\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right)x \longrightarrow 12x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

$x=0$ ، $x=-\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول اند چون به ازای $x=0$ شیب خط نداریم و $x=-\frac{1}{2}$ نیز در دامنه f نیست.

$$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(4\times\frac{1}{4}+3\right)=m\times\frac{1}{2} \longrightarrow m=8\sqrt{2}$$

برهام شریعتی

$y=mx^2$

۹ـ خط L از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}$ در نقطه‌ی A مماس است. عرض نقطه‌ی A را بیابید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{-2x^2+x+1}\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\frac{t}{-2t^4+t^2+1}=mt^2$$

$$-2mt^5+mt^3+mt-1=0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} -10mt^4+3mt^2+m=0 \longrightarrow -m(10t^4-t^2-1)=0 \xrightarrow{t^2=k} -a(10k^2-k-1)=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=9+40=49}\begin{cases} k_1=t^2=\frac{3+7}{20}=\frac{1}{2} \checkmark \longrightarrow t^2=(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}\longrightarrow x=\frac{1}{2} \\ k_2=t^2=\frac{3-7}{20}=-\frac{1}{5}\ \times \quad \text{منفی نیست } t^2 \end{cases}$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰- فرض کنید $f(x)=\left(x[x]\right)^3$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $-48\sqrt{5}$ است؟

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))\longrightarrow (fog)'_-\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)=g'_-\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)f'\left(g\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)^-\right)$$

$$g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\times 2x\longrightarrow g'\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\times\sqrt5=-4\sqrt5$$

$$x\longrightarrow\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)^-\longrightarrow g\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^-}=2^+$$

$$x\longrightarrow 2^+ \Rightarrow [2^+]=2 \Rightarrow f(x)=(2x)^3=8x^3\longrightarrow f'(x)=24x^2 \longrightarrow f'\left(g\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)^-\right)$$

$$f'(2^+)=24\times4=96$$

$$f'\left(g\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)^-\right)\times g'\left(\tfrac{\sqrt5}{2}\right)=96(-4\sqrt5)\xrightarrow[\div(-48\sqrt5)]{} 8$$