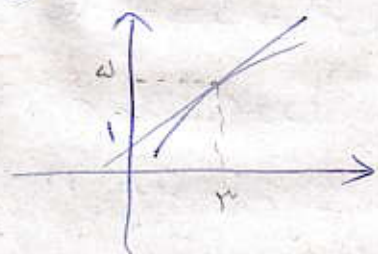


۱- نمودار تابع  $f$  و خط مماس بر آن در نقطه  $(3, 5)$  در شکل زیر



رسم شده است. مقدار  $f'(3)$  را بیابید.

نقطه  $(1, 0)$  و  $(3, 5)$  پس خط مماس بر تابع اند.

$$f'(3) = \frac{5-0}{3-1} = \frac{5}{2} \checkmark$$

(۲)

تیب خط مماس بر بخش در نقطه  $(3, 5)$  با مشتق تابع در آن نقطه برابر است.

۲- خط مماس بر منحنی  $f(x) = \sqrt{ax-1}$  در نقطه  $A$  از نقاط

$(-1, -1)$  و  $(2, 2)$  می گذرد. مقدار  $f(5)$  را بیابید.

$$m = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{معادله خط مماس} \Rightarrow y-1 = \frac{1}{3}(x+1) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(۲)

$$\sqrt{ax-1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow 9(ax-1) = x^2 + 8x + 16 \rightarrow x^2 + (1-9a)x + 25 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (1-9a)^2 - 4(25) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1-9a = 10 \rightarrow a = -\frac{2}{3} \\ 1-9a = -10 \rightarrow a = 2 \end{cases}$$

به ازای این مقدار  $a$  مشتق در نقطه  $A$  تعیین نشده است.

$$a = 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x-1} \rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3 \checkmark$$

برهان شریعی

۳- معادله خط مماس بر نمودار  $y = \frac{x^r + mx + 1}{x + r}$  در نقطه ای بر طول

واحد بر روی نمودار، به صورت  $ry - rx = n$  است. مقدار  $m+n$  چقدر است؟

$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{2}$

$$y' = \frac{(rx+m)(x+r) - (1)(x^r + mx + 1)}{(x+r)^2} \xrightarrow{x=1} y'(1) = \frac{r(r+m)}{16} = \frac{r}{2} \quad m=r$$

$ry - rx = n \xrightarrow{x=1} ry - r = n \rightarrow y = \frac{n+r}{r}$

$y = \frac{x^r + mx + 1}{x+r} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1+m+1}{1+r} \xrightarrow{m=r} y = 1$

$\frac{n+r}{r} = 1 \rightarrow n = r$

$n+m = 1+r = r$

با استفاده  $g(x) = \frac{r}{r + \sin x}$  و  $f(x) = \frac{r - \sin^r x}{r - \sin^r x}$

حاصل عبارت  $r g'(\frac{\Delta \pi}{r}) - f'(\frac{\Delta \pi}{r})$

$r g'(\frac{\Delta \pi}{r}) - f'(\frac{\Delta \pi}{r}) = (r g' - f')(\frac{\Delta \pi}{r}) = (r g - f)'(\frac{\Delta \pi}{r})$

$(r g - f)'(x) = \frac{r \times r}{r + \sin x} - \frac{r - \sin^r x}{r - \sin^r x} = \frac{r}{r + \sin x} - \frac{(r - \sin x)(r + r \sin x + \sin^2 x)}{(r - \sin x)(r + \sin x)}$

$= \frac{-r \sin x - \sin^2 x}{r + \sin x} = \frac{-\sin x (r + \sin x)}{r + \sin x} = -\sin x$

$(r g - f)'(x) = -\sin x \Rightarrow (r g - f)'(\frac{\Delta \pi}{r}) = -\cos x \rightarrow (r g - f)'(\frac{\Delta \pi}{r}) = -\cos \frac{\Delta \pi}{r}$

$-\cos(\frac{\Delta \pi}{r}) = -\cos(\frac{\pi}{r}) = -\frac{1}{r}$

برهان ضربی

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + |x^2|} \text{ و } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+|x|}}$$

$$g'(\sqrt{x}) f'(g(\sqrt{x})) = (f \circ g)'(\sqrt{x}) \quad \text{! باید}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} & x > 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2x}} & x > 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \rightarrow f \circ g(x) = \frac{-1}{\sqrt{2g(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2 \times \frac{1}{x^2}}} = -x \quad \checkmark$$

(2)

$$(f \circ g)'(x) = -1 \rightarrow (f \circ g)'(\sqrt{x}) = -1$$

حل  $f(x) = xg(x) + 1$  و  $f(x) = \left( \frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x} \right)^2$

$$f(x) = xg(x) + 1 \rightarrow g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

$$g(x) = \frac{\frac{\sin^2 x - 1 \sin x + 1}{\sin^2 x + 1 \sin x + 1} - 1}{x} = \frac{-f \sin x}{\sin^2 x + 1 \sin x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f \sin x}{\sin^2 x + 1 \sin x + 1} \stackrel{\text{L'Hopital}}{\sim} \frac{-f x}{x^2 + 1x + 1} = \frac{-f}{x^2 + 1x + 1} = -f \quad \checkmark$$

(2)

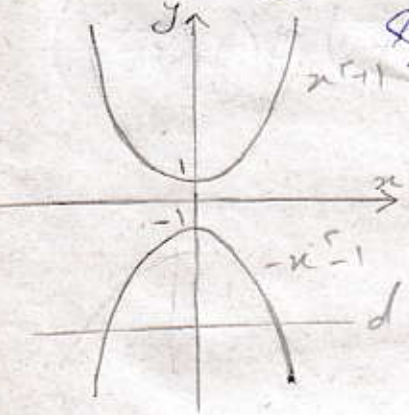
$$\text{Dol} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} \stackrel{\text{Hop}}{\frac{0}{0}} \frac{f'(x)}{1} = f'(0)$$

$$f'(x) = 2 \left( \frac{\cos x (1 + \sin x) - \cos x (-1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \right) \left( \frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x} \right) = \frac{4 \cos x (-1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{4 \times 1 \times (-1)}{1} = -4$$

برهان شریعی

۷ - خط موازی محور  $x$ ها - قرینه مدعی  $y = x^2 + 1$  نسبت به محور  $x$ ها را در نقطه قطع می کند و مماس های رسم شده دایره نقاط بر هم می خوردند - فاصله خط از مبدأ مختصات کدام است ؟



$$\begin{cases} f(\alpha) \times f(-\alpha) = -1 \\ f(x) = x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = 2x \quad \alpha^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (-2\alpha)(2\alpha) = -1$$

$$f(\alpha) = f(-\alpha) = -\alpha^2 - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$d = \text{فاصله خط} = y = -\frac{3}{2}$$

فاصله از مبدأ مختصات =  $\frac{3}{2}$  ✓

۲

۸ - خط از مبدأ مختصات می گذرد و بر نمودار تابع  $f$  مماس است  
شیب خط را بیابید. معادله خط  $y = mx$   
 $f(x) = 2\sqrt{x} (4x^2 + 3)$

$$f(x) = 2\sqrt{x} (4x^2 + 3) = mx \rightarrow 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = mx$$

$$f'(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} = m$$

$$\rightarrow 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = (2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}})x \rightarrow 12x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}$  و  $x = -\frac{1}{2}$  غیر قابل قبول اند چون به ازای  $x = 0$  شیب خط بیش از  $x = \frac{1}{2}$  نیز در دامنه  $f$  است ✓

۲

$$2x \frac{\sqrt{2}}{2} \times (4x^{\frac{1}{2}} + 3) = m \times \frac{1}{2} \rightarrow m = 8\sqrt{2} \quad \checkmark$$

$y = mx$

۹ - حد اولاً محققات می‌توزد و بر نمودار تابع یا ضابطه

فرض نقطه A در نقطه  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-2x^r + x + 1}$  می‌باشد.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-2x^r + x + 1} \xrightarrow{\sqrt{x} = t} \frac{t}{-2t^r + t^r + 1} = \frac{mt^r}{-2mt^r + mt^r + 1} = \frac{mt^r}{-mt^r + 1}$$

$$-mt^r + 1 = 0 \rightarrow -m(1 - t^r) = 0 \rightarrow t^r = 1 \rightarrow t = 1 \rightarrow x = 1$$

$\Delta = 9 + 4 = 13$

$$\begin{cases} k_1 = t^r = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{r} \rightarrow t^r = (\sqrt{x})^r = \frac{1}{r} \rightarrow x = \frac{1}{r^2} \\ k_2 = t^r = \frac{3-\sqrt{13}}{2} = -\frac{1}{9} \times \text{!} \rightarrow \text{منفی } t^r \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{r}}}{-2\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} + 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}}}{\frac{1}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

۱۰ - فرض کنید  $f(x) = (x[x])^r$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

مقدار مشتق هجرت تابع  $f \circ g$  در  $x = \frac{\sqrt{5}}{r}$  چند برابر  $-4\sqrt{5}$  است؟

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x)) \rightarrow (f \circ g)'\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right) = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right) f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right)\right)$$

$$g'(x) = -\frac{1}{r} (x^2-1)^{-\frac{r}{2}} \times 2x \rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right) = -\frac{1}{r} \times \left(\frac{1}{r}\right)^{-\frac{r}{2}} \times \sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

$$x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right)^- \rightarrow g\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^-} = r^+$$

$$x \rightarrow r^+ \rightarrow [r^+] = r \rightarrow f(x) = (rx)^r = r^r x^r \rightarrow f'(x) = r^r \times r x^{r-1} \rightarrow f'(g\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right)) = r^r \times r \times r^{r-1} = 96$$

$$f'(g\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right)) \times g'\left(\frac{\sqrt{5}}{r}\right) = 96 \times (-4\sqrt{5}) = -384\sqrt{5}$$