

برهان سریع ۲۰

۱- اگر f تابع مشتق پذیر، $g(x) = f(\tan x + \sqrt{r} \cos x)$ و $g'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{r}$ باشد، مقدار $f'(r)$ را بیابید.

$$g'(x) = f'(\tan x + \sqrt{r} \cos x) \times (1 + \tan x - \sqrt{r} \sin x)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} g'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{r} = f'(1+1) \times (1-1) \rightarrow f'(r) = \frac{\sqrt{r}}{r} \checkmark$$

(۲)

۲- اگر $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{r}{1 - \cos x}$ باشد،

حاصل عبارت $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) - r g'(\frac{\sqrt{\pi}}{6})$ را بیابید.

$$f(x) = \frac{(1 + \cos x)(\cos^2 x + 1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x}$$

$$(f - rg)(x) = \frac{\cos^2 x - r \cos x}{1 - \cos x} = \frac{-\cos x(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = -\cos x$$

(۲)

$$(f - rg)'(x) = \sin x \rightarrow (f - rg)'(\frac{\sqrt{\pi}}{6}) = -\frac{1}{2} \checkmark$$

پروام شریقی

۳ - برای کدام مقدار a ، مشتق شیب نیم خط‌های مماس
 در $x = \frac{2}{3}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟
 چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3| \sqrt{ax}$ در نقطه‌ی

$$x > \frac{3}{4} \Rightarrow y = (4x - 3) \sqrt{ax}$$

$$y'_+ = 4 \sqrt{ax} \Big|_{x=\frac{3}{4}} = 2\sqrt{3a}$$

$$y'_- = -2\sqrt{3a}$$

$$\text{مشتق} = 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

(۲)

$$x < \frac{3}{4} \rightarrow (3 - 4x) \sqrt{ax}$$

۴ - خط $y + ax = 2$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار تابع f مماس
 است. اگر $f(4) + f'(4) = -1$ باشد، مقدار $f'(4)$ را بیابید.

$$f(4) + f'(4) = -1 \rightarrow (2 - 4a) + (-a) = -1 \rightarrow a = \frac{3}{5}$$

$$f'(4) = -a = -\frac{3}{5}$$

(۲)

تیمام شریعی

۵ - خط $y - x = 5$ در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی

$y = \frac{ax-1}{x+1}$ مماس است. مقدار a را بیابید.

$$\frac{ax-1}{x+1} = \frac{5+x}{1} \rightarrow van - v = 18x + 13x^2 + 5 + x \rightarrow 13x^2 + (14 - va)x + 15 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \rightarrow (14 - va)^2 - 4(13)(15) \geq 0 \rightarrow (14 - va)^2 \leq 156 \rightarrow \begin{cases} 14 - va \geq 12 \rightarrow a \leq \frac{2}{v} \\ 14 - va \leq -12 \rightarrow a \geq \frac{26}{v} \end{cases}$$

$$a = \frac{2}{v} : 13x^2 + 12x + 15 = 0 \rightarrow x = -2 \quad \text{X (ناممکن اول)}$$

$$a = \frac{26}{v} : 13x^2 - 12x + 15 = 0 \rightarrow x = 2 \quad \checkmark \rightarrow a = \frac{13}{7} \quad \checkmark$$

(۲)

۹ - نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax - b$ در نقطه ای بر محور x ها مماس است مقدار $b - a$ را بیابید.

$$f(1) = 0 \rightarrow 1 + a - b = 0$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow 2x + a = 0 \xrightarrow{x=1} a = -2, b = -1$$

$$b - a = -4 \quad \checkmark$$

(۲)

برهان شریعی

۷- فرض کنید $f(x) = \sin^n(x^r)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) f'(x)}{(1 - \cos x)^m} = \sqrt[3]{2}$

مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^n(x^r) \approx (x^r)^n = x^{rn} \rightarrow f'(x) = rn x^{rn-1}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) f'(x)}{(1 - \cos x)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{rn} (rn x^{rn-1})}{(\frac{x^2}{2})^m} = \lim_{x \rightarrow 0} (rn x^{rn}) \frac{x^{rn-1}}{x^{2m}} = \sqrt[3]{2}$

در اینجا $m = \frac{1}{2}$ است که حاصل غیر صحیحی دارد پس باید درجه m از صورت و خارج برابر باشد
 $f_{n-1} = 2m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (rn x^{rn}) \frac{x^{rn-1}}{x^{2m}} = rn x^{rn} = \sqrt[3]{2}$

$\rightarrow rn x^{rn} \times \frac{1}{\sqrt{r}} = \sqrt[3]{2} \rightarrow rn x^r = \sqrt[3]{2} \rightarrow n = r \rightarrow m = \frac{r}{2}$
 $2m = n-1$
 $2m + n = 1$

۸- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ را در نظر بگیرید. شیب

خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن را

یابید
 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \rightarrow y(\sqrt{x-1}) = \sqrt{x+1} \rightarrow y\sqrt{x-1} - y - \sqrt{x+1} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{y-1}$

$x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 \rightarrow y = f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \rightarrow (f^{-1}(x))' = 2 \left(\frac{-1-1}{(x-1)^2}\right) \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$x=2 \rightarrow (f^{-1}(2))' = 2(-2)(3) = -12$

برهان شریعی

۹- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = (x^2+1)^3 (ax+1)$ در بازه $[0, 1]$ برابر ۱۱- است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه $x = -2a$ ۱ باشد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = -11 \quad * \quad 11a - 7 = f(1) - f(0) = -11$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} f(0) = 1^3 \times 1 = 1 \\ f(1) = 1^3 \times (1-a) = 1-a \end{cases}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} : f'(x) \xrightarrow{a = -\frac{1}{4}} f'(1)$$

$$f'(x) = 3(x^2+1)^2 (ax+1) + (a)(x^2+1)^3$$

$$f'(1) = 4(1)^2(-\frac{1}{4}+1) + (-\frac{1}{4})(1)^3 = 1 \quad \checkmark$$

۲

۱۰- در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos x$ چیست برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ است؟

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط اولی} &= \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \\ \text{آهنگ متوسط دومی} &= \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{2}{\pi}} = 1 \quad \checkmark$$

۲