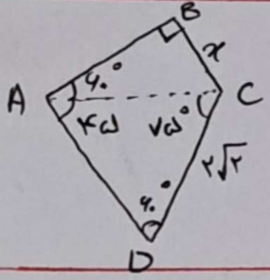
(۱)
$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow \frac{۲۰}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{\frac{۲۰\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}}{۶}}{۲۰}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow B=۴۵$$

$B+C=۱۲۰\Rightarrow C=۱۲۰-۴۵=۷۵$

$B=۴۵^\circ \quad C=۷۵^\circ$

(۲)



$$\frac{DC}{\sin ۴۵}=\frac{AC}{\sin ۶۰}\Rightarrow \frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۰=\frac{x}{AC}\Rightarrow x=AC\times\sin ۶۰=۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳$$

(۳)
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K\Rightarrow\begin{cases}a=\sin A\times K\\ b=\sin B\times K\\ c=\sin C\times K\end{cases}$$

$$(b^۲-۲)\frac{\sin C}{\sin B}=c\Rightarrow(b^۲-۲)\frac{\sin C}{\sin B}=\sin C\times K\Rightarrow\frac{b^۲-۲}{\sin B}=K\Rightarrow b^۲-۲=\sin B\times K\Rightarrow b^۲-۲=b\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^۲-b-۲=۰\Rightarrow(b-۲)(b+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\boxed{b=۲ \quad \text{ق ق}}\\ b=-۱\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

(۴)
$$AC=\sqrt{(AB)^۲+(BC)^۲-۲(AB)(BC)\cos B}\Rightarrow(۱۳)^۲=(۲۰)^۲+(۲۱)^۲-۲(۲۰)(۲۱)(\cos B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۸۴۰\cos B=۴۰۰+۴۴۱-۱۶۹=۶۷۲\Rightarrow\cos B=\frac{۶۷۲}{۸۴۰}=\frac{۳۳۶}{۴۲۰}=\frac{۴}{۵}\qquad \sin^۲B+\cos^۲B=۱\Rightarrow \sin^۲B=۱-\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin B=\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۳}{۵}$$

(۵) الف)
$$BC=\sqrt{(AC)^۲+(AB)^۲-۲(AC)(AB)\cos A}\Rightarrow(BC)^۲=a^۲=(۴)^۲+(۲+۲\sqrt{۳})^۲-۲(۴)(۲+۲\sqrt{۳})(\tfrac{۱}{۲})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^۲=۲۴\Rightarrow a=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

ب)
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۶}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow$$

$$B=۴۵^\circ\Rightarrow C=۱۸۰-(۶۰+۴۵)=۷۵^\circ$$

(۶)
$$BC=\sqrt{(AB)^۲+(AC)^۲-۲(AB)(AC)(\cos A)}\Rightarrow(۲)^۲=(۱)^۲+(۲)^۲-۲(۱)(۲)\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$DE=\sqrt{(AE)^۲+(AD)^۲-۲(AE)(AD)(\cos A)}\Rightarrow(DE)^۲=(۴)^۲+(۶)^۲-۲(۴)(۶)(\tfrac{۱}{۴})=۴۰\Rightarrow DE=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

(۷) الف)
$$BC=\sqrt{(AB)^۲+(AC)^۲-۲(AB)(AC)(\cos A)}\Rightarrow(BC)^۲=(۵)^۲+(۸)^۲-۲(۵)(۸)(\tfrac{۱}{۲})=۴۹\Rightarrow BC=۷$$

ب)
$$S=\frac{۱}{۲}(AB)(AC)(\sin A)=\frac{۱}{۲}(۵)(۸)(\tfrac{\sqrt{۳}}{۲})=۱۰\sqrt{۳}$$

(۸)
$$\frac{(b+c)^۲-a^۲}{bc(\cos A+۱)}=\frac{b^۲+c^۲+۲bc-(b^۲+c^۲-۲(b)(c)(\cos A))}{bc(\cos A+۱)}=\frac{۲bc(\cos A+۱)}{bc(\cos A+۱)}=۲$$

(۹)
$$\frac{a^۳+b^۳-c^۳}{a+b-c}=a^۲\Rightarrow a^۳+b^۳-c^۳=a^۳+a^۲b-a^۲c\Rightarrow b^۳-c^۳=a^۲b-a^۲c\Rightarrow b^۲+c^۲+bc=a^۲\Rightarrow$$

$$b^۲+c^۲+bc=b^۲+c^۲-۲(b)(c)(\cos A)\Rightarrow bc=-۲bc\cos A\Rightarrow\cos A=-\frac{۱}{۲}$$

(۱۰)
$$S=\frac{۱}{۲}(BA)(AC)\sin A=\frac{۱}{۲}(۳-\cos\theta)(۱+۳\cos\theta)(\tfrac{۱}{۲})=۲\Rightarrow-۳\cos^۲\theta+۸\cos\theta+۳=۸\Rightarrow۳\cos^۲\theta-۸\cos\theta+۵=۰$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\begin{cases}۱ & \text{ق ق}\\ \frac{۵}{۳} & \text{غ ق ق}\end{cases}\qquad a^۲=(AB)^۲+(AC)^۲-۲(AC)(AC)(\cos A)=(۲)^۲+(۴)^۲-۲(۲)(۴)(\tfrac{\sqrt{۳}}{۲})=۲۰-۸\sqrt{۳}$$