

(1) با استفاده از قضیه سینوس در مثل $\triangle ABC$ و در نظر گرفتن اینکه $\angle A = 120^\circ$

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = 120^\circ$$

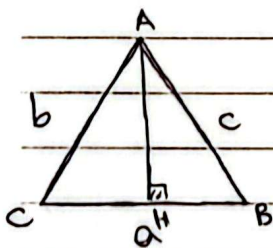
$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} \Rightarrow \frac{\sin 120^\circ}{20} = \frac{\sin \hat{B}}{10\sqrt{3}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

ملاحظه کنید زاویه $\hat{B}$ 120° نمی تواند باشد چرا که این است که $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$ متضاد اصله
 $\hat{B} + \hat{C} = 120^\circ \Rightarrow 45^\circ + \hat{C} = 120^\circ \rightarrow \hat{C} = 75^\circ$

$$\hat{A}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + 75^\circ + 40^\circ = 180^\circ \rightarrow \hat{A}_2 = 65^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin \hat{D}} = \frac{DC}{\sin \hat{A}_2} \rightarrow \frac{AC}{\sin 40^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 65^\circ} \rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

$$\sin 40^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow x = 3$$



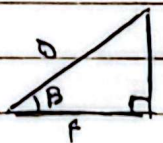
$$(b^2 - 2) \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = c \rightarrow (b^2 - 2) \times \frac{\frac{AH}{AB}}{\frac{AH}{AC}} = c$$

$$(b^2 - 2) \times \frac{AB}{AC} = (b^2 - 2) \times \frac{c}{b} = c \rightarrow b^2 - 2 = b$$

$$\rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \quad a+c=b \quad \left. \begin{array}{l} b = -1 \text{ و } 2 \\ b = 2 \checkmark \end{array} \right\}$$

(2) ابتدا از طریق قضیه سینوس $\hat{B}$ را پیدا کنیم

$$149 = 400 + 441 - 2 \times 20 \times 21 \cos \hat{B} \rightarrow 149 \cos \hat{B} = 2\sqrt{2} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{2\sqrt{2}}{149} = \frac{4}{5}$$



$$\Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b}{a}$$

چون این زاویه حاد است در نتیجه سینوس آن نیز مثبت است

$$a^2 = 14 + 4 + 1\sqrt{4} + 12 - 2 \times 4 \times (2 + 2\sqrt{4}) \times \frac{1}{4} = 24 = a^2 \quad \boxed{a = 2\sqrt{6}} \quad \text{الف}$$

$$\frac{\sin B}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{4}} \Rightarrow \sin B = 4 \times \frac{\sqrt{4}}{4} \wedge \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ \quad \text{ب}$$

4) انتهای از طریق مساحت ABC در افقی کسینوس α را می یابیم

$$4 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$DE^2 = 14 + 14 - 2 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{2} \Rightarrow DE^2 = 6 \Rightarrow \boxed{DE = \sqrt{6}} \quad \text{ج}$$

$$\text{د) } BC^2 = 12 + 44 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{4} = 44 - 2 = 42 = BC^2 \quad \boxed{BC = \sqrt{42}} \quad \text{د}$$

$$\text{ه) } S_{ABC} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{4}}{2} \times 2 \times 4 = \boxed{1\sqrt{4}} \quad \text{ه}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

ا) طبق قضیه کسینوس داریم:

$$\rightarrow \frac{(b^2 + c^2) - a^2}{bc(\cos A + 1)} = \frac{b^2 + c^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos A}{bc(\cos A + 1)} = \frac{2bc + 2bc \cos A}{bc(\cos A + 1)} = \frac{2bc(\cos A + 1)}{bc(\cos A + 1)} = \boxed{2}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c} = a^2 \quad \text{ب) } a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + a^2 b - a^2 c$$

$$\rightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2) = a^2(b - c) \rightarrow b^2 + bc + c^2 = a^2$$

این معادله همیشه همان فوکل کسینوس می باشد در صورتی که بتوانیم $\cos A = -\frac{1}{2}$ را

$$3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times (3 - \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta) = 2 \rightarrow 3 + 9 \cos \theta - \cos \theta - 3 \cos^2 \theta = 4 \quad \text{10}$$

$$\rightarrow 3 \cos^2 \theta - 8 \cos \theta + 2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 1 \\ \cos \theta = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$a^2 = 4 + 14 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{4}}{4} = 20 - 4\sqrt{4} = a^2$$