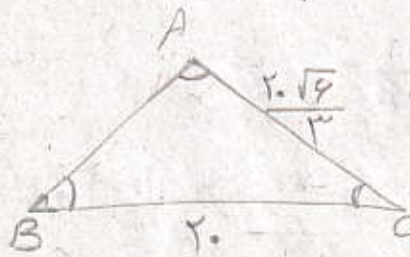


۱- در مثلث ABC اگر $BC=20$ و $\hat{B}+\hat{C}=120^\circ$ و $AC=\frac{20\sqrt{6}}{3}$ باشد



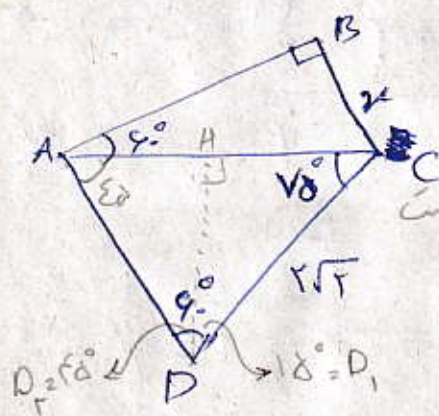
زاویه های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را مشخص کنید.
 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$
 $\hat{B}+\hat{C}=120^\circ \rightarrow \hat{A}=60^\circ$

$$\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB} = \frac{\sin \hat{B}}{AC}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{20} = \frac{\sin \hat{B}}{\frac{20\sqrt{6}}{3}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \hat{B}=45^\circ *$$

(۲)

$$\hat{B}+\hat{C}=120^\circ \rightarrow \hat{C}=75^\circ *$$



۲- در شکل مقابل متعارف با $\hat{D}_1=15^\circ$ و $\hat{D}_2=45^\circ$ با برآیند AC رسم می کنیم $AH=HD$ $\Rightarrow$ متساوی الساقین است $\hat{DAC}=180-(45+75)=60^\circ$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} \rightarrow \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} *$$

$$DH = DC \times \cos 15^\circ \rightarrow AH=HD = 20 \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} \rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} (I)$$

$$CH = DC \times \sin 15^\circ \xrightarrow{(I)} CH = 20 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = 10\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$AC = CH+AH = \sqrt{2(2-\sqrt{3})} + \sqrt{2(2+\sqrt{3})}$$

$$x = BC = \sin 60^\circ \times AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{2(2-\sqrt{3})} + \sqrt{2(2+\sqrt{3})})$$

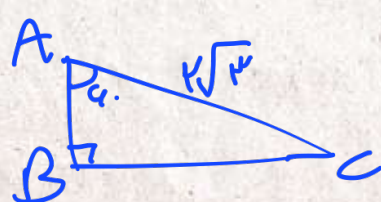
$$x = \frac{\sqrt{6}}{2} (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})$$

(۱,۵)

$$\frac{20\sqrt{6}}{3} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$$

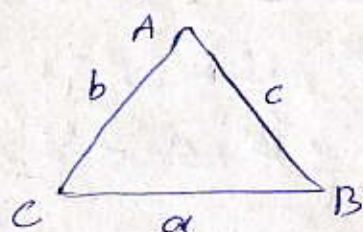
$$\frac{20\sqrt{6}}{3} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$AC = 20\sqrt{3}$$



$$\rightarrow \sin 60^\circ = \frac{a}{20\sqrt{3}} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20\sqrt{3} = 30$$

۳- اگر در مثلث ABC زاویه A برابر ۲ باشد، اندازه ضلع b را بیابید.



$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \Rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{b} \quad *$$

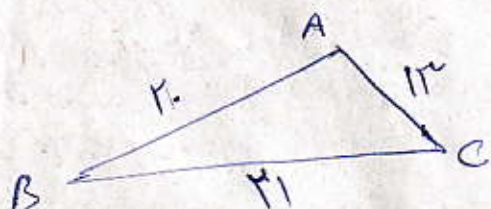
$$(b^2 - 2) \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = c \quad * \rightarrow (b^2 - 2) \times \frac{c}{b} = c \quad \begin{matrix} c \neq 0 \\ \text{چون یک ضلع} \\ \text{مثلث است} \end{matrix} \rightarrow b = b^2 - 2 \rightarrow b^2 - b - 2 = 0$$

$$(b-2)(b+1) = 0$$

(۲)

عده ۱- b = 0
چون b ضلع مثلث است.

۴- در مثلث مقابل sin B را بیابید.



$$13 = \sqrt{20^2 + 21^2 - 2 \times 20 \times 21 \times \cos \hat{B}} \quad \cos \hat{B} = 7/10 \quad \checkmark$$

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos \hat{B}$$



$$\begin{aligned} DE^2 &= 100 - 81 \\ DE &= 9 \end{aligned}$$

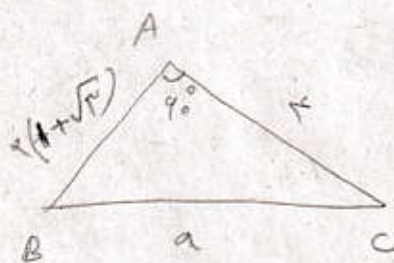
$$\Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{9}{10} = 0.9 \quad \checkmark$$

(۲)

پرهام شریعی

۵- در مثل ABC ، $b=4$ و $c=2(1+\sqrt{3})$ و $\hat{A}=40^\circ$

ص باشد : الف) اندازه ی ضلع a را بیابید.
ب) زاویه های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را مشخص کنید.



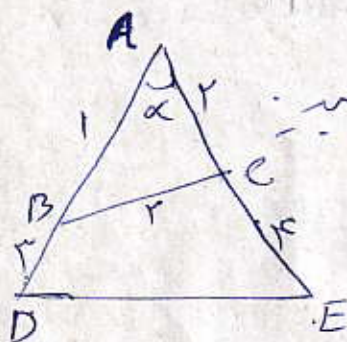
$$a = \sqrt{4^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2 - 2(4 \times (2 + 2\sqrt{3})) \times \frac{1}{2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sin \hat{B}}{4} = \frac{\sin \hat{C}}{2(1+\sqrt{3})}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

$$\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 95^\circ$$



۶- در مثل ABC و DE اندازه ی ضلع DE را بیابید.

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha}$$

$$2 = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2(1 \times 2 \times \cos \alpha)} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

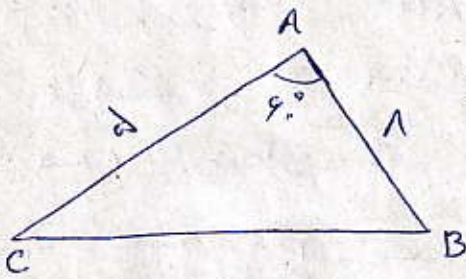
$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \alpha}$$

$$DE = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2(4 \times 4 \times \frac{1}{2})} \rightarrow DE = 4\sqrt{2}$$

۷- مثلث ABC را در نظر بگیرید و ۲ سوالات پاسخ دهید:

الف) طول ضلع BC را بدست آورید.

ب) مساحت مثلث ABC را بدست آورید.



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}} \quad \text{الف)}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

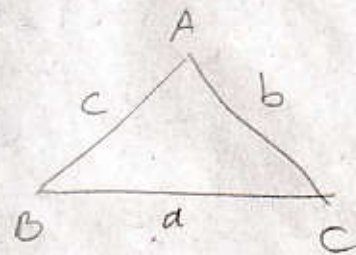
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

۸- در مثلث ABC حاصل عبارت $\frac{(b+c)^2 - a^2}{bc(\cos \hat{A} + 1)}$ را بیابید.

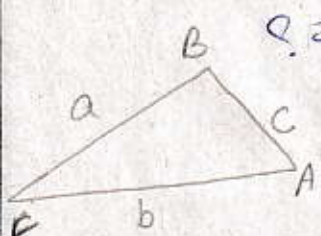
$$\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{bc(\cos \hat{A} + 1)} \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}} \frac{2bc + 2bc \cos \hat{A}}{bc(\cos \hat{A} + 1)}$$

$$\rightarrow \frac{2bc(\cos \hat{A} + 1)}{bc(\cos \hat{A} + 1)} = 2 \quad \checkmark$$

(۲)



۹- در مثلثی با اضلاع متعلق به نایر برابر a, b, c ابتدای $a^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c}$



برقرار است و کسینوس زاویه $\hat{A}$ متعلق به a مقدار است؟

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c} = a^2 \rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + a^2 b - a^2 c$$

$$\rightarrow b^2 - c^2 = a^2(b - c) \xrightarrow{a^2 b + c^2 - 2cb \cos \hat{A}} b^2 - c^2 = (b^2 + c^2 - 2cb \cos \hat{A})(b - c)$$

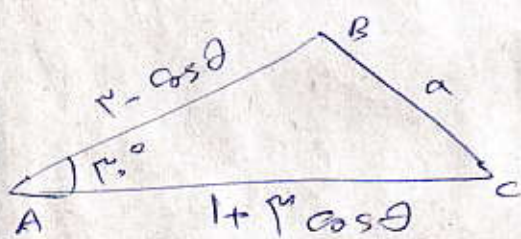
$$\rightarrow b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \hat{A} - cb^2 - c^3 + 2c^2 b \cos \hat{A} \quad (2)$$

$$\rightarrow 0 = cb(c - b) + 2cb \cos \hat{A}(c - b) \rightarrow (c - b)(cb + 2cb \cos \hat{A}) = 0$$

حال برای اینکه حاصلضرب این دو برابر صفر شود یا $c - b$ صفر است یعنی $c = b$ که معادله شرط مساله است

یا $cb + 2cb \cos \hat{A} = 0 \rightarrow cb + 2cb \cos \hat{A} = 0 \rightarrow cb(1 + 2 \cos \hat{A}) = 0$ است $\leftarrow$
 $\xrightarrow{cb \neq 0} 1 + 2 \cos \hat{A} = 0 \rightarrow 2 \cos \hat{A} = -1 \rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{2} \rightarrow \hat{A} = 120^\circ$
 نه هر دو ضلع صفر اند

۱- مساحت مثلث زیر برابر ۲ است - مقدار a^2 را بیابید.



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{BAC}$$

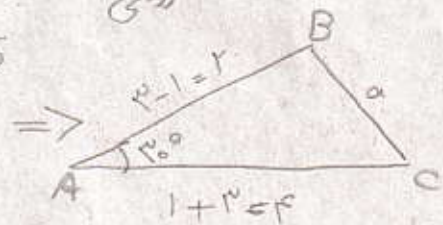
$$S = \frac{1}{2} (r - \cos \theta)(1 + r \cos \theta) \times \frac{1}{2} = 2$$

$$S = \frac{1}{8} (-r \cos \theta + 1 \cos \theta + r) = 2$$

$$\rightarrow -r \cos \theta + 1 \cos \theta + r = 16 \rightarrow -r \cos \theta + 1 \cos \theta - 15 = 0 \rightarrow r \cos \theta + 1 \cos \theta + 15 = 0$$

$$\rightarrow (\cos \theta + r)(\cos \theta + 15) = 0$$

$$\cos \theta = -\frac{r}{1} = -1 \quad \text{و} \quad \cos \theta = -\frac{15}{1} = -15$$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{BAC} \Rightarrow a^2 = r^2 + 16^2 - 2(r \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = 256 - 16\sqrt{3}$$