

الف) $f(x) = x + [x]$

برای داشتن $y = x + [x]$ از طرف $[x]$ داریم:

$$[y] = [x + [x]] \Rightarrow [y] = 2[x] \rightarrow [x] = \frac{[y]}{2} \quad (1)$$

$$y = x + [x] \xrightarrow{(1)} y - \frac{[y]}{2} = x \rightarrow f^{-1}(y) = y - \frac{[y]}{2}$$

$$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow x + [x] = x - \frac{[x]}{2} \rightarrow \frac{3[x]}{2} = 0 \rightarrow [x] = 0$$

این شماره را قطع می کنند.

ب) $f(f^{-1}(x)) = 2x - \frac{3}{2} \rightarrow x = 2x - \frac{3}{2} \rightarrow -x = -\frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

باید چک کنیم $\frac{3}{2} \in D_f$ هست یا نه: $D_f = [0, 1) \cup [2, 3) \dots = D_{f^{-1}}$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \notin D_{f^{-1}} \rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

- وقتی محل برخورد منحنی قائم و منحنی افق روی نیمه راست اول رسم باشد $f(x) = f^{-1}(x) \leftarrow \left[\frac{3}{2} \right]$

$$f(f^{-1}(5 - \sqrt{4})) = f(f^{-1}(5 - \sqrt{4})) \rightarrow f \circ f^{-1}(5 - \sqrt{4}) = 5 - \sqrt{4} \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{mx + 3}{x + m + 3}$$

- توابع متقابل وارون خود را روی $y = x$ قطع می کنند.

محل برخورد

$$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow f(x) = x \rightarrow \frac{mx + 3}{x + m + 3} = x \rightarrow mx + 3 = x^2 + mx + 3x \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

α, β ریشه ها:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -2 \\ P = \alpha \cdot \beta = -3 \end{cases}$$

$$\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \cdot \beta} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \right] \quad \checkmark$$

$$f(x) = |2x+5| - |5x-2| = \begin{cases} 3x-7 & x < -\frac{5}{2} \\ 5x+7 & -\frac{5}{2} < x < \frac{2}{5} \\ -3x+7 & x \geq \frac{2}{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض}} g(x) = -3x+7 \quad x \geq \frac{2}{5}$$

پس: $y = -3x+7 \rightarrow \frac{7-y}{3} = x \rightarrow g^{-1}(y) = \frac{7-y}{3}$; $D_{g^{-1}} = R_g = x \geq \frac{2}{5}$ ✓

$$g(x) = 2f(3x)-1 \xrightarrow[\text{برای وارون کردن}]{g(x)} y = 2f(3x)-1 \rightarrow f(3x) = \frac{y+1}{2} \xrightarrow{\text{از دو طرف}} f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$f \circ f(3x) = f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right) \rightarrow 3x = f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right) \rightarrow x = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right) \rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{3} f^{-1}\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$\rightarrow a = \frac{1}{3}, b = 1, c = 2, d = 0$

$$\frac{ac+d}{2b} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{3} \quad \checkmark$$

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} \quad x \geq 0$$

$$D_{f^{-1}} = R_f \rightarrow R_f = \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 3 \\ f(+\infty) = +\infty \end{cases} \rightarrow R_f : [0, +\infty) = D_{f^{-1}} \quad \textcircled{1}$$

برای وارون کردن: $y = x + 2\sqrt{x} \rightarrow y = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \rightarrow \sqrt{y+1} = |\sqrt{x} + 1| \xrightarrow{\text{مثبت}} \sqrt{y+1} - 1 = \sqrt{x}$

$$\xrightarrow{\text{بجای}} x = (\sqrt{y+1} - 1)^2 \rightarrow f^{-1}(y) = (\sqrt{y+1} - 1)^2 \quad x \geq 0 \quad \textcircled{1} \quad \checkmark$$

$$y = \frac{x-1}{2} + 2^x \xrightarrow[\text{جمع دو طرف}]{\text{همه طرفها}} y = \text{معلوم}$$

پس داریم توابع اکیداً صعودی وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می کنند ①

$$f(x) = f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{مطابقت}} f(x) = x \rightarrow x-1+2^x = x \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow \text{نقطه در یک نقطه قطع می کنند} \quad \checkmark$$

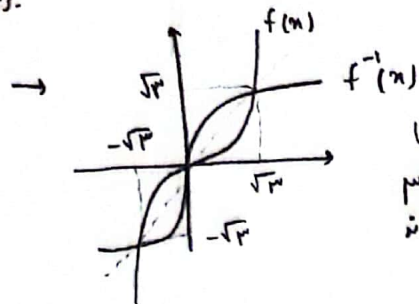
$$f(x) = x^3 + 4x, \quad y = \sqrt{f^{-1}(x) - x} \rightarrow D_y: f^{-1}(x) - x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) \geq x$$

۱) - ۸

$f(x)$ تابعی که صدوی است در نتیجه وارون خود را درون خط x قطع می کند.

$$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow f(x) = x \rightarrow x^3 + 4x = x \rightarrow x^3 + 3x = 0 \rightarrow x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$$

برخورد



تغویارها
فرقی رسم
شده اند

$$f^{-1}(x) \geq x \xrightarrow{\text{باتوجه به نمودار}} [0, \sqrt{3}] \cup (-\infty, -\sqrt{3}]$$

$$f(x) \leq x$$

$$x \leq 0$$

$$x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

شکل یک عدد صحیح
نامعقول {0}

$$f(x) = -x + \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$$

۰ -

۱) نسبت به
نیمساز ناحیه اول
سوم قرینه

$$y = -x + \sqrt{x+4} \rightarrow -y = x - \sqrt{x+4} \rightarrow -y = (\sqrt{x+4} - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \sqrt{-y + \frac{1}{4}} = \sqrt{x+4} - \frac{1}{4} \rightarrow (\sqrt{-y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4})^2 = x+4$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{-x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} \quad x \leq 4$$

۲) واحد به جیب
انتقال می دهیم

$$g(x) = \sqrt{-(x+4) + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \quad x+4 \leq 4$$

$$g(x) = x-3 \rightarrow (\sqrt{-x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} = x-3 \rightarrow -x + \frac{1}{4} + \sqrt{-x + \frac{1}{4}} = x-3$$

$$\rightarrow \sqrt{-x + \frac{1}{4}} = 2x - \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{باتوجه به } x \geq 0} \text{این معادله جواب ندارد چون سمت راست عددی منفی می شود.}$$

جواب صحیح بعد ...

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \rightarrow \sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \xrightarrow{1)'} y = (2 - \sqrt{x})^2 \quad y \geq 0, x \geq 0$$

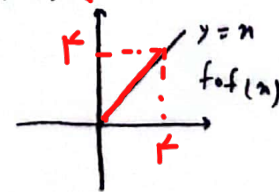
۱, ۷۵ - ۱۰

$$f(f(x)) = (2 - \sqrt{(2 - \sqrt{x})^2})^2 = (\sqrt{x})^2 = x \quad x \geq 0$$

$$\sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

محدوده

به دافنه توجه کن!



$$\xrightarrow[\text{به نفعیت}]{\text{فترت نسبت}} f^{-1}(n) \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{۴ واحد}} f^{-1}(n+4)$$

۹

$$g(n) = f^{-1}(n+4) = n-3 \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{از دوطرف}} f \circ f^{-1}(n+4) = f(n-3)$$

$$n+4 = -(n-3) + \sqrt{n+1} \rightarrow 2n+1 = \sqrt{n+1} \quad \underline{\text{توان}}$$

$$4n^2 + 3n = 0 \rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=-\frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{جواب رادیکال} \\ \text{روستقرینه} \end{array}$$