۱۹ آفرین !!

مبینا جعفری پور　　تکلیف ۸　　دوازدهم دختر B

۱ $D_{gof(x)} = \{x \mid x \in D_f ,\ f(x) \in D_g\}$

$f(x) = \sqrt{\log_2^{(x-1)}}$ $\begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ \log_2^{(x-1)} \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow D_f : [2,+\infty)$

$g(x) = \sqrt{-x^2+4x-4} = \sqrt{-(x-2)^2} \longrightarrow -(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow D_g = \{2\} \Rightarrow f(x) = 2 = \sqrt{\log_2^{(x-1)}} \Rightarrow 4 = \log_2^{(x-1)} \Rightarrow 2^4 = x-1 \Rightarrow x = 17$

تساوی ۰ امکان پذیر است

$\Rightarrow [2,+\infty) \cap \{17\} = \boxed{\{17\} = D_{gof}}$

۲
۲ $D_{fog} = \{x \mid x \in D_g ,\ g(x) \in D_f\}$　　$D_f = \mathbb{R} ,\ D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{fog} = D_{gof} = \mathbb{R}$　　$gof(x) = (2x-5)^2 - 3(2x-5) + 8 = 4x^2 - 26x + 48$

$D_{gof} : \{x \mid x \in D_f ,\ f(x) \in D_g\}$　　$fog(x) = 2(x^2-3x+8) - 5 = 2x^2 - 6x + 11$

$fog(x) = gof(x) \Rightarrow 2x^2-6x+11 = 4x^2-26x+48 \Rightarrow 2x^2-20x+37 = 0 \xrightarrow{\Delta>0} x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = (\frac{-b}{a})^2 - 2(\frac{c}{a}) = 100 - 37 = \boxed{63}$

۲
۳ $gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = 5x^2 + 11$

$y_{min\ gof(x)} : x = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow y_{min} = 11 \Longrightarrow y_{min\ g(x-7)} = \boxed{11}$

از آنجایی که تنها انتقال در راستای افقی داشته ایم پس مقادیر تابع تغییر نمی‌کند و min آن ثابت می‌ماند :

۲
۴ $f(g(x)) = 3x^2 - 6x - 1 = 3g(x) - 4 \Rightarrow \frac{3x^2-6x+3}{3} = x^2 - 2x + 1 = g(x) = (x-1)^2$

$gof(x) = ((3x-4)-1)^2 = (3x-5)^2 = \boxed{9x^2 - 30x + 25}$

۲
۵ $f-g : \begin{matrix}(0,5)\\(5,0)\end{matrix} \Rightarrow m = \frac{5-0}{0-5} = -1 \Rightarrow y - 0 = -(x-5) \Rightarrow y = -x+5$

$fog(x) : \begin{matrix}(0,2)\\(a,0)\end{matrix} \Rightarrow m = \frac{2-0}{0-a} = \frac{-2}{a} \Rightarrow y - 2 = \frac{-2}{a}(x-0) \Rightarrow y = \frac{-2}{a}x + 2$

$2g(x) = 3f(x) - 14 \Rightarrow f(x) = \frac{2g(x)+14}{3}$ $\begin{cases} \frac{2g(x)+14}{3} - g(x) = -x+5 = \frac{-g(x)+14}{3} \Rightarrow g(x) = 3x-1 \Rightarrow f(x) = 2x+4 \\ fog(x) = 2(3x-1)+4 = 6x+2 = \frac{-2}{a}x + 2 \Rightarrow 6 = \frac{-2}{a} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{3}} \end{cases}$

۲
۶ $f(x) = 9^x$　$g(x) = \log_3^x$　$fog(x) = 9^{\log_3^x} = x^{\log_3^9} = x^2$　$D_f = \mathbb{R}$　$D_g = (0,+\infty) \Rightarrow D_{fog} = (0,+\infty)$

$gof(x) = \log_3^{9^x} = \log_3^{3^{2x}} = 2x$　$fog(x) \leq gof(x) \Rightarrow x^2 \leq 2x \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0$　$D_{gof} : f(x) \in D_g \Rightarrow 9^x > 0$ همیشه برقرار $\Rightarrow \mathbb{R}$

x		0		2	
	+	0	−	0	+

$\xrightarrow{\text{fog در ۰ تعریف نمی‌شود}} \boxed{(0,2]}$

۲
۷ $f(\underbrace{\frac{x^2-2}{x}}) = x^2 + x - 4 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = (x - \frac{2}{x})^2 + x - \frac{2}{x} \xrightarrow{x-\frac{2}{x}=t} f(t) = t^2 + t \Rightarrow \boxed{f(x) = x^2 + x}$

$\frac{x^2-2}{x} = x - \frac{2}{x}$

۲
۸ $A = D_{fog} = \{x \mid x \in D_g ,\ g(x) \in D_f\}$　$D_g = \mathbb{R}$, $D_f : x>0 \Rightarrow (0,+\infty) \Rightarrow 0 < g(x) \Rightarrow 0 < -x^2 + 8x$

x		0		8	
	−	0	+	0	−

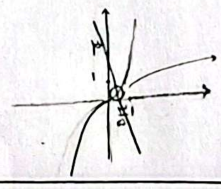
$\Rightarrow D_{fog} = (0,8)$

۲
$B = R_{fog}$　$fog(x) = \log_2^{8x-x^2} \longrightarrow R_g : 8x - x^2 \begin{cases} x_{max} = \frac{-b}{2a} = 4 \\ y_{max} = 16 \end{cases} \Rightarrow (-\infty,16] \xrightarrow[\text{دامنه fog}]{\text{با توجه به}} (0,16] \Rightarrow R_{fog} : \log_2^{8x-x^2} \Rightarrow (-\infty,4]$

$A \cap B = (0,8) \cap (-\infty,4] = \boxed{(0,4]}$

۹ $f(f(x)) = 1 - 2f^2(x) \xrightarrow{f(x)=t} f(t) = 1 - 3t^2 \Rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$　　$h(g(x)) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

$h(g(x)) = f(x) \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 1 - 3x^2 \Rightarrow x^3 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = 3 - 5x$



یک ریشه دارد

۲

۱۰ $gof(x) = g(f(x)) = g(x - \frac{۴}{x}) = ax^{۳} + ۲x \xrightarrow{x=۴} g(۳) = ۶۴a + ۸ = ۸ \Rightarrow \boxed{a = ۰}$ ✓

$x - \frac{۴}{x} = ۳ \rightarrow x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰$

$x = ۴$ ✓

$x = -۱ \rightarrow -a - ۲ = ۸$

$\boxed{a = -۱۰}$