نام و نام خانوادگی ...مریم معصومی... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۲۷... کلاس ...دوازدهم ریاضی...

۲۰ آفرین

۱

$f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b$ $\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ $\quad \lim \frac{f'(x)}{x}=2$ $\quad a+b=?$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^3 2x+ax^2+b}{x}=0$ → چون مخرج کسر صفره و حاصل حد صفر شده پس صورت هم صفر بوده .

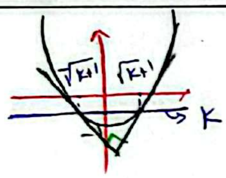
البته صفر حدی یا $0=\frac{0\ \text{مطلق}}{0\ \text{حدی}}$

$f(0)=0 \to \underbrace{\cos^3(0)}_{1}+a(0)^2+b=0 \to b=-1$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{-6\sin 2x\cos^2(2x)+2ax}{x}=2$ $\xrightarrow[\sin u\sim u]{\text{هم ارزی}}$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{-6\cos^2 2x(\cancel{2x})+2a\cancel{x}}{\cancel{x}}=-12\cos^2(2x)+2a=2$

$=-12+2a=2 \to a=7$ $\quad a+b \to 7+(-1)=6$

۲



$y=x^2-1$ $\quad x_1=(\sqrt{k+1},k)$ $\quad x_2=(-\sqrt{k+1},k)$

مشتق این تابع در دو نقطه ی x_1 و x_2 برهم عمودند یعنی ضرب شان $=-1$

شیب این دو خط عکس و قرینه همدیگر هستند.

$f(x)=x^2-1 \to f'(x)=2x$

$(2\sqrt{k+1})\times(-2\sqrt{k+1})=-1 \to k+1=\frac{1}{4} \to k=-\frac{3}{4}$

$x_1=(\frac{1}{2},-\frac{3}{4})$ $\quad x_2=(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4})$ ⟸ مجموع عرض این نقاط $=-\frac{3}{4}+(-\frac{3}{4})=\boxed{-\frac{3}{2}}$

۳

$f(x)=\frac{a}{2x-1}$

ابتدا خط مماس گذرنده از دو نقطه (۲٫۵ و ۶) و (۰٫۵- و ۱۲-) را بدست می آوریم

$m=\frac{6-(-12)}{2.5-(-0.5)}=\frac{18}{3}=6$ $\quad y-6=6(x-2.5)$ $\quad \boxed{y=6x-9}$

$\frac{a}{2x-1}=6x-9$

چون این خط بر منحنی $f(x)$ مماس است بنابراین معادله تماس این دو $\Delta=0$

$12x^2-24x+9-a=0 \to b^2-4ac=0$ $\quad 24^2-48(9-a)=0$

$\frac{\cancel{24}\times 24}{12}=\cancel{48}(9-a) \to 9-a=12 \to a=-3$

$f(x)=\frac{-3}{2x-1} \to f(5)=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$

۴

$g(x)=y=2x+b$ $\quad f(x)$ $y=\frac{x+a}{ax+1}$

یعنی در نقطه ی ۱ مشتق دو تابع باهم برابر است .

چون خط $y=2x+b$ در نقطه ۱ بر $f(x)$ مماس است $\Leftarrow f'(1)=2$

$f'(x)=\frac{1-a^2}{(ax+1)^2} \to f'(1)=2$ $\quad \frac{1-a^2}{(a+1)^2}=2 \to \frac{(1-a)\cancel{(1+a)}}{(1+a)\cancel{(1+a)}}=\frac{1-a}{1+a}=2$

$2+2a=1-a \to 3a=-1 \to a=-\frac{1}{3}$

از طرفی $f(1)=g(1) \to \frac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}x+1}=2x+b \xrightarrow{x=1} \frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}+1}=2+b$ $\quad 1=2+b \to b=-1$

$a-b=-\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}$

۵

$\frac{3}{2}\sin x=\sin x+\frac{1}{2}\cos x \to \frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}\cos x$ $\quad x\in[0,\pi]$ $\quad x=\frac{\pi}{4}$ $\quad f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ② $\Leftrightarrow f'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}$ ① $\quad f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ معادله خط مماس $y-y_0=m(x-x_0)$ $\xrightarrow{①\ و\ ②}$

$y-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4}) \xrightarrow[y=0]{\text{محل تقاطع با محور } x \text{ ها}} -\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})$ $\quad \boxed{x=\frac{\pi}{4}-3}$

۶

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

مشتق تابع f هر جا تغییر علامت دار[د] اکسترمم نسبی است

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \rightarrow 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$

$-1 \quad 2$: $+ \quad - \quad +$

$A(-1, 8)$, $B(2, -19) \rightarrow m_{AB} = \dfrac{8-(-19)}{-1-2} = \dfrac{27}{-3} = -9$

$f'(x) = -9 \rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9 \rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \rightarrow \Delta > 0$

دو نقطه روی منحنی f وجود دارند. که خطوط مماس بر آنها موازی پاره خط AB است.

2

۷

$y = kx^3 + (k+1)x^2$ | $\dfrac{-(k+1)}{3k} < 0 \rightarrow \dfrac{k+1}{3k} > 0$ ① $(k+1)^3 \times \dfrac{2}{27k^2} > 0 \quad k > -1$ ②

∗ را در عبارت جایگذاری می‌کنیم تا عرض نقطه‌ی عطف بدست آید.

نقطه عطف تابع درجه ۳: $\dfrac{-b}{3a} = \dfrac{-(k+1)}{3k}$ ∗

چون نقطه عطف در ناحیه دوم محورها است

پس $x<0$ و $y>0$

$-k\left(\dfrac{-(k+1)}{3k}\right)^3 + (k+1)\left(\dfrac{-(k+1)}{3k}\right)^2$ $\quad (k+1)^3\left(\dfrac{-k}{27k^3} + \dfrac{1}{9k^2}\right)$

$\dfrac{3}{27k^2} - \dfrac{1}{27k^2} \rightarrow \dfrac{2}{27k^2}$

$\left(\dfrac{-(k+1)}{3k},\ (k+1)^3 \times \dfrac{2}{27k^2}\right)$

①∩② $k>0$

2 به ازای هیچ مقدار k دارای شرط مسئله نیست

۸

خط مماس بر منحنی در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می‌کند پس این نقطه مختصات نقطه عطف است.

(x_0, y_0) $\quad y = x^3 + ax^2 + bx - 1$

$\dfrac{-a}{3} = -1 \rightarrow \boxed{a=3}$

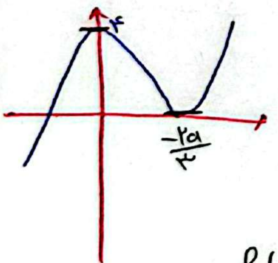
$f(x) = x^3 + 3x^2 + bx - 1 \xrightarrow{f(-1)=-4} (-1)^3 + 3(-1)^2 - b - 1 = -4 \rightarrow b = 5$

$\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5}}$

2

۹

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $\quad f(0) = 4$ (عرض از مبدا تابع) $\quad f'(0) = 0$ اکسترمم نسبی (max نسبی)



$f(0) = 4 \rightarrow c = 4$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{f'(0)=0} b = 0$ 2

$f(x) = x^3 + ax^2 + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax \rightarrow x(3x+2a) = 0$

$x = 0$ یا $x = \dfrac{-2a}{3}$ ∗ طول min نسبی $\quad x = \dfrac{-2(-3)}{3} = 2$

$f\left(\dfrac{-2a}{3}\right) = 0 \rightarrow \left(\dfrac{-2a}{3}\right)^3 + a\left(\dfrac{-2a}{3}\right)^2 + 4 = 0$ $\quad \dfrac{4}{27}a^3 = -4 \rightarrow a^3 = -27$, $a = -3$

۱۰

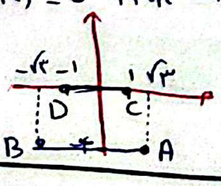
$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x \quad 4x(x^2 - 3) = 0 \quad x = 0,\ x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$

$-\sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3}$: $- \quad + \quad - \quad +$ (min, min)

$f(\sqrt{3}) = -4$, $f(-\sqrt{3}) = -4$

$A = (\sqrt{3}, -4)$ $\quad B = (-\sqrt{3}, -4)$

$f''(x) = 0 \quad 12x^2 - 12 = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 <$ $x = 1 \quad C = (1, 0)$; $x = -1 \quad D = (-1, 0)$



پاره خط CD و AB هر دو افقی هستند پس زاویه بین این دو پاره خط صفر است.

2