کیمیا امیری نیا

۲۰ آفرین

①

$f(x)=\cos^{۲}(۲x)+ax^{۲}+b \rightarrow f'(x)=-۶\sin۲x\cdot\cos^{۲}۲x+۲ax$

$\lim_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}\overset{\lim}{=}\frac{-۶\sin۲x.\cos^{۲}۲x+۲ax}{x}\xrightarrow{hop}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-۶(۲\cos۲x\times\cos^{۲}۲x+\sin۲x\times۲\cos۲x\times(-۲\sin۲x))+۲a}{۱}$

$=(-۶)(۲)+۲a=۲ \rightsquigarrow ۲a=۱۴ \rightsquigarrow \boxed{a=۷}$

$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{\cos^{۳}(۲x)+ax^{۲}+b}{x}=۰$ چون مخرج ۰ است اما حد دارد، باید کسر ۰ شود.

$\cos^{۳}(۰)+b=۰ \rightarrow \boxed{b=-۱}$ $a+b=۶$

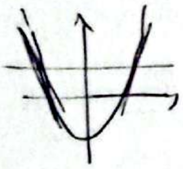
۲

②

$y=x^{۲}-۱ \rightsquigarrow y'=۲x$

$۲x(-۲x)=-۱ \rightsquigarrow ۴x^{۲}=۱ \rightsquigarrow x=\pm\frac{۱}{۲}$

$y=\frac{۱}{۴}-۱=\frac{-۳}{۴}$ $\frac{-۳}{۴}+\left(-\frac{۳}{۴}\right)=\frac{-۶}{۴}=\boxed{\frac{-۳}{۲}}$



۲

③

$f(x)=\frac{a}{۲x-۱}$ $(-۰/۵,-۱۲)\ (۲/۵,۶) \rightsquigarrow m=\frac{۶-(-۱۲)}{۲/۵-(-۰/۵)}=\frac{۱۸}{۳}=۶$

معادله خط مماس $=۶x-۹=y$

$f(x)=\frac{a}{۲x-۱}=۶x-۹ \rightarrow a=(۲x-۱)(۶x-۹)$
$f'(x)=\frac{-۲a}{(۲x-۱)^{۲}}=۶ \rightsquigarrow a=-۳(۲x-۱)^{۲}$
$\rightarrow -۳(۲x-۱)^{۲}=(۲x-۱)(۶x-۹)$

شرط دامنه $x=\pm\frac{۱}{۲}$ غ ق ق

$\longrightarrow -۳(۲x-۱)=۶x-۹ \rightsquigarrow ۶x-۹=-۶x+۳ \rightsquigarrow ۱۲x=۱۲ \rightsquigarrow x=۱$

$a=-۳$ $f(a)=\frac{-۳}{-۶-۱}=\frac{-۱}{۳}$ ۲

④

$y=۲x+b$
$y'=۲$

$y=\frac{x+a}{ax+۱} \rightsquigarrow y'=\frac{(ax+۱)-a(x+a)}{(ax+۱)^{۲}}\xrightarrow{x=۱}=\frac{۱-a^{۲}}{(۱+a)^{۲}}$

$=\frac{(۱-a)}{(۱+a)}=۲ \rightsquigarrow ۱-a=۲+۲a \rightsquigarrow a=\frac{-۱}{۳}$

$y=\frac{x-\frac{۱}{۳}}{\frac{-۱}{۳}x+۱}\xrightarrow{x=۱} y=۱ \rightarrow ۲(۱)+b=۱ \rightsquigarrow b=-۱$ ۲ $\boxed{a-b=\frac{۲}{۳}}$

(۵)

$g(x)=\frac{۳}{۲}\sin x$ $\quad f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x$

نقطه تلاقی $\rightsquigarrow \frac{۳}{۲}\sin x=\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x \rightsquigarrow \sin x=\cos x \to x=\frac{\pi}{۴}$

$f(\frac{\pi}{۴})=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ $\quad f'(x)=\cos x-\frac{۱}{۲}\sin x \rightsquigarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

معادله خط مماس $\rightsquigarrow \frac{\sqrt{۲}}{۴}x-\frac{\pi\sqrt{۲}}{۱۶}+\frac{۳\sqrt{۲}}{۴} \xrightarrow{y=۰} \cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}x=\frac{\pi\cancel{\sqrt{۲}}}{\cancel{۱۶}_{۴}}-\frac{۳\cancel{\sqrt{۲}}}{\cancel{۴}} \rightsquigarrow \boxed{x=\frac{\pi}{۴}-۳}$ ✓

۲

(۶)

$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x-۱ \xrightarrow{\cancel{f(x)}} f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x^۲-x-۲)$

$x=۲ \quad x=-۱$

$A=(۲,-۱۹) \quad B=(-۱,۸)$

$m_{AB}=\frac{-۲۷}{۳}=-۹$

۲

$f'(x)=-۹ \rightsquigarrow ۶(x^۲-x-۲)=-۹ \rightsquigarrow ۶x^۲-۶x-۳=۰ \rightsquigarrow ۲x^۲-۲x-۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰}$ ۲ نقطه ✓

(۷)

$y=kx^۳+(k+۱)x^۲ \to y'=۳kx^۲+۲(k+۱)x \rightsquigarrow y''=۶kx+۲(k+۱)$

$* \quad y''=۰ \rightsquigarrow ۶kx+۲k+۲=۰ \rightsquigarrow x=\frac{-۲k-۲}{۶k} \xrightarrow{x<۰} \frac{-۲k-۲}{۶k}<۰$

$$\begin{array}{c|c|c} & -۱ & ۰ \\ \hline - & + & - \end{array}$$

$k\in(-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty) \xrightarrow{k<۰} k\in(-\infty,-۱)$

x نقطه‌ی عطف منفی
(ناحیه دوم یا سوم)

$\rightarrow \boxed{A=\varnothing}$ ✓

۲

$(\frac{-۲k-۲}{۶k})^۲(\frac{-۲k-۲}{۶}+k+۱)>۰$ $\quad \frac{۴k+۴}{۶}$

$$\begin{array}{c|c|c} & -۱ & \overset{*}{۰} \\ \hline - & + & + \end{array}$$

$k\in(-۱,۰)$

(۸)

$y=x^۳+ax^۲+bx-۱$

$(-۱)^۳+a(-۱)^۲-b\cancel{x}-۱=۴ \rightsquigarrow -a-b=۶ \rightsquigarrow a-b=-۲$

x نقطه‌ی عطف $=\frac{-b}{۳a} \rightsquigarrow x=\frac{-a}{۳\times۱} \rightsquigarrow -۱=\frac{-a}{۳} \rightsquigarrow \boxed{a=۳}$

$۳-b=-۲ \to \boxed{b=۵}$ $\quad \frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}$ ✓

۲

⑨

$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c \rightsquigarrow f' = ۳x^۲ + ۲ax + b$

بر اساس نمودار $\boxed{c = ۴}$ $\qquad f'(۰) = ۰ \rightsquigarrow \boxed{b = ۰}$

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax = x(۳x + ۲a) \rightsquigarrow f'(x) = ۰ \rightsquigarrow x = \frac{-۲a}{۳}$

$\frac{-۲a}{۳}$ ۴

$f\left(\frac{-۲a}{۳}\right) = ۰ \rightsquigarrow \left(\frac{-۲a}{۳}\right)^۳ + a\left(\frac{-۲a}{۳}\right)^۲ + ۴ = ۰$

$\frac{-۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} = -۴ \rightsquigarrow a = -۳ \rightsquigarrow \frac{-۲a}{۳} = \boxed{۲}$ ②

---

⑩

$f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۵ \rightsquigarrow f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x \rightsquigarrow f'(x) = ۰ \rightarrow x = ۰, \pm\sqrt{۳}$

$\hookrightarrow f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲ \rightarrow f''(x) = ۰ \rightarrow x = \pm ۱$

x		$-\sqrt{۳}$		۰		$+\sqrt{۳}$	
f'	~~+~~		+		−		+
f	↘		↗		↘		↗

$A(\sqrt{۳}, -۴) \quad B(-\sqrt{۳}, ۴) \rightarrow m_{AB} = ۰$

$C(۱, ۰) \quad D(-۱, ۰) \rightarrow m_{CD} = ۰ \rightarrow ۰ =$ زاویه بینشان

②