باران تسلیمی　　　دوازدهم دختر B

۱۷٫۲۵

۱-

$x(1-|x|) \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x(1+x)} & x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & x < -1 \end{cases}$$

۱٫۷۵

بحرانی = 1 و -1 و $\frac{+1}{2}$ و 0

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$-$		//////		$+$		$-$		//////	
y		↘		//////		↗		↘		//////	
			0				$\frac{1}{2}$		0		

$m + n + k = \frac{1}{2} + 0 + 4 = 4{,}5$

-۲

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{a-2x}} = 0 \qquad D_f = 0 \le x \le \frac{a}{2}$$

ریشه‌ها: $\boxed{x=0}$, $\boxed{x = \frac{a}{2}}$

$$\rightarrow \frac{2\sqrt{a-2x} - 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x(a-2x)}} = 0 \rightarrow 2\sqrt{a-2x} - 4\sqrt{x} = 0$$

$$2\sqrt{a-2x} = 4\sqrt{x}$$

$$a - 2x = 4x \Rightarrow 6x = a$$

$$\boxed{x = \frac{a}{6}}$$

$$f(0) = \sqrt{a}$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{2}} \quad \min$$

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} \quad \max$$

۲

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}} \times \sqrt{a} \times \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{12} \rightarrow 3a = 12 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

-۳

تعداد نقاط اکسترمم نسبی؟

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\,|x^2-4|$$

$$f(x) = \begin{cases} x \ge 2 \text{ or } x \le -2 & \dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} \rightarrow \left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)(x^2-4) \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x + \dfrac{6x}{(x^2-1)^2} \\ -2 < x < 2 & \dfrac{-x^2(x^2-4)}{x^2-1} \xrightarrow{\text{مشتق}} -2x - \dfrac{6x}{(x^2-1)^2} \end{cases}$$

در نقطه‌ی ۱+ و ۱− مشتق تعریف نشده است.
و در نقطه‌ی صفر، مشتق تابع برابر صفر است
= سه اکسترمم نسبی

۲

۴- $A(0,0)$ و $B(1,1)$

اکسترمم نسبی $y=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند

$ab=?$

$\underbrace{3ax^2+2bx+c}_{\text{ریشه = ۱ و ۰}}$ $\Rightarrow c=0$

$a+b=1$

$d=0$

$$3a+2b=0$$
$$-2a+2b=2$$
$$a=-2$$
$$b=3$$

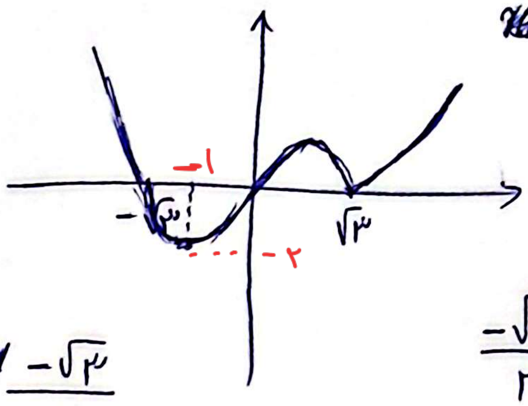
$\boxed{ab=-6}$

۲

۵- مینیمم مطلق $f(x)=x|3-x^2|$ در بازه‌ی $[-1/5, \sqrt{3}]$ ؟

$x\times|\sqrt{3}-x|\times|\sqrt{3}+x|$

۱/۵



$\frac{-\sqrt{3}}{2}$ طول مینیمم مطلق

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}\times\underbrace{\left|\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\times\underbrace{\left|\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$f(x)=-x^3+3x \rightarrow f'(x)=-3x^2+3 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm1$

$x=1 \rightarrow y=2$ $\quad$ $x=-1 \rightarrow y=-2$ → min مطلق

$$\frac{9}{4}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{-9\sqrt{3}}{8}$$

۶- $A(-1,1)$ $\quad y=x^2(-x)+3ax^2+b \Rightarrow y=-x^3+3ax^2+b$

$y'=-3x^2+6ax \xrightarrow{x=-1} -3-6a=0 \Rightarrow a=\frac{-1}{2} \Rightarrow y=-x^3-\frac{3}{2}x^2+b$

$1=0-(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2+b \Rightarrow 1=1-\frac{3}{2}+b \Rightarrow b=\frac{3}{2}$

$\frac{b}{a}$ $\quad -3$

۲

۷- ایکس مجـ $= \frac{-d}{c} = \frac{1-a}{a+1} = \frac{-1}{3} \rightarrow 3-3a = -a-1 \rightarrow 2a = 4$

$a = 2$

$y = \frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{d=0} 2x+3 = 0 \quad x = \frac{-3}{2}$ ۲

۸- $4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = 0$

$\longrightarrow \frac{1}{2}a = 2 \longrightarrow a = 4 \qquad \frac{b}{a} = 3$ ۲

$\lim_{x\to\infty} \frac{bx^2+7}{4x^2+ax+7} \longrightarrow \frac{b}{4} = 3 \quad b = 12$ ۲

۹- $y' = \frac{4x^3(x^3-8) - 3x^2(x^4)}{(x^3-8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3-8)^2}$

$= \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3-8)^2} \Rightarrow x^6 - 32x^3 = 0$

$x = 0 \;/\; x = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$

تابع در $(0,2)$ و $(2, 2\sqrt[3]{4})$ اکیداً نزولی است

x		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
y'	$+$		$-$	$\parallel$	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$		$\nearrow$

مجانب قائم

Min طول بازه $= \boxed{2(\sqrt[3]{4} - 1)}$ ۲

۱۰-۵

۱۰

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^2-3)-2x(x^4-3)}{(x^2-3)^2}=\frac{2x[(2x^4-6x^2)-(x^4-3)]}{(x^2-3)^2}$$

$$2x^5-12x^3+6x=0\longrightarrow 2x(x^4-6x^2+3)=0 \;\begin{cases} x=0\\ x^2=t\end{cases}$$

$$t^2-6t+3=0\longrightarrow t=\frac{6\pm\sqrt{24}}{2}\longrightarrow x=\pm\sqrt{3-\sqrt6}\qquad \boxed{-2<x<2}$$

-2		$-\sqrt3$		$-\sqrt{3-\sqrt6}$		0		$\sqrt{3-\sqrt6}$		$\cancel{\sqrt3}$	
	$-$		$-$		$+$		$-$		$+$		$+$

در ۳ بازه اکیداً نزولی است!

۱

$$x(1-|x|)\geq 0\rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[0,1]$$

$$f'(x)=\frac{1-2|x|}{2\sqrt{x(1-|x|)}}\rightarrow |x|=\frac12\rightarrow x=\frac12$$ ($x=-\frac12$ در دامنه نیست)

x		$\frac12$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

$n=0$

$m=1$

نقاط ۰ و ۱± و $\frac12$ برای $\leftarrow$ $k=4$

$$m+n+k=4+1=\boxed{5}$$